Algebra Lineare e Geometria

Francesco Pavese

F. Pavese: Dipartimento di Meccanica Matematica e Management, Politecnico di Bari, Via Orabona 4, I-70125 Bari, Italy
e-mail: *francesco.pavese@poliba.it*

Indice

1 Nozioni preliminari

Siano X, Y due insiemi non vuoti. L'insieme

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}$$

si definisce *prodotto cartesiano* di X e Y. Più in generale, se $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sono n insiemi non vuoti, allora l'insieme

$$X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in X_i, 1 \leq i \leq n\}$$

si definisce *prodotto cartesiano* di $X_1, X_2, \ldots, X_n$. Il simbolo X^n indica il prodotto cartesiano $X \times X \times \ldots \times X$.

Un'*applicazione* o *funzione* o *mappa* da X a Y è una corrispondenza $f : X \longrightarrow Y$ tale che $\forall x \in X$, $\exists!\, y \in Y$ tale che $f(x) = y$. Gli insiemi X e Y si definiscono *dominio* e *codominio* di f, rispettivamente.

i) f si definisce *iniettiva* se $\forall x_1, x_2 \in X$ tali che $f(x_1) = f(x_2)$, allora $x_1 = x_2$.

ii) f si definisce *suriettiva* se $\forall y \in Y$, $\exists\, x \in X$ tale che $f(x) = y$.

iii) f si definisce *biettiva* se è sia iniettiva che suriettiva.

Si definisce *immagine di f* l'insieme

$$Im(f) = \{f(x) \mid x \in X\} = \{y \in Y \mid \exists\, x \in X, f(x) = y\}.$$

Se $y \in Y$, si definisce *controimmagine di y* l'insieme

$$f^{-1}(y) = \{x \in X \mid f(x) = y\}.$$

Si ottiene facilmente il seguente risultato.

Proposizione 1.1. *f è iniettiva se e solo se $\forall y \in Y$, $|f^{-1}(y)| \leq 1$.*

f è suriettiva se e solo se $Im(f) = Y$.

Si definisce *funzione identità* o *applicazione identica* di X la mappa

$$id_X : x \in X \longmapsto x \in X.$$

Si noti che la funzione identità è biettiva. Siano X, Y, Z insiemi non vuoti e siano $f : X \longrightarrow Y$ e $g : Y \longrightarrow Z$ due funzioni. Allora si definisce *funzione composta* e si denota con $g \circ f$ la funzione

$$g \circ f : x \in X \longmapsto g(f(x)) \in Z.$$

Una funzione $f : X \longrightarrow Y$ si dice *invertibile* se esiste una funzione $g : Y \longrightarrow X$ tale che $f \circ g = g \circ f = id_X$.

Proposizione 1.2. *Una funzione f è invertibile se e solo se f è biettiva.*

Sia X un insieme non vuoto. Un'operazione interna $\odot$ su X è un'applicazione $\odot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G}$, che associa ad ogni coppia $(a, b) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}$ l'elemento $a \odot b \in \mathbb{G}$.

1.1 Strutture algebriche

1.1.1 Gruppi

Sia $\mathbb{G}$ un insieme non vuoto dotato di un'operazione interna

$$\odot : \mathbb{G} \times \mathbb{G} \longrightarrow \mathbb{G},$$

che associa ad ogni coppia $(a, b) \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}$ un elemento $a \odot b \in \mathbb{G}$.

La coppia $(\mathbb{G}, \odot)$ si dice *gruppo* se valgono le seguenti proprietà:

1) $\forall a, b, c \in \mathbb{G}$, $a \odot (b \odot c) = (a \odot b) \odot c$ *(associativa)*;

2) $\exists$ un elemento $u \in \mathbb{G}$ tale che $\forall a \in \mathbb{G}$, $a \odot u = u \odot a = a$ *(esistenza dell'elemento neutro)*;

3) $\forall a \in \mathbb{G}$, $\exists\ a' \in \mathbb{K}$ tale che $a \odot a' = u$ *(esistenza dell'opposto o dell'inverso)*.

Quando l'operazione $\odot$ è determinata, il gruppo $(\mathbb{G}, \odot)$ si denoterà semplicemente con $\mathbb{G}$.

Se inoltre $\odot$ soddisfa la seguente proprietà:

$$\forall a, b \in \mathbb{G}, a \odot b = b \odot a \ \textit{(commutativa)}$$

il gruppo $\mathbb{G}$ si dice *commutativo* o *abeliano*.

Esempi 1.3. Si considerino l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$, dei numeri interi $\mathbb{Z}$, dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, dei numeri reali $\mathbb{R}$ e dei numeri complessi $\mathbb{C}$ dotati delle usuali operazioni di somma "+" e prodotto "·". Allora $(\mathbb{Z}, +)$, $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$, $(\mathbb{C}, +)$, $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$, $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$ forniscono esempi di gruppi abeliani. Mentre le coppie $(\mathbb{N}, +)$, $(\mathbb{N}, \cdot)$ e $(\mathbb{Z} \setminus \{0\}, \cdot)$ non sono gruppi.

1.1.2 Campi

Sia $\mathbb{K}$ un insieme non vuoto dotato di due operazioni interne

$$+ : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}, \quad \cdot : \mathbb{K} \times \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$$

dette *somma* e *prodotto*, rispettivamente, che associano ad ogni coppia $(a, b) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}$ un elemento $a + b \in \mathbb{K}$, detto *somma di a più b* ed un elemento $a \cdot b \in \mathbb{K}$, detto *prodotto di a per b*, rispettivamente. La terna $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ si dice *campo* se valgono le seguenti proprietà:

1) $(\mathbb{K}, +)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro 0;

2) $(\mathbb{K} \setminus \{0\}, \cdot)$ è un gruppo abeliano con elemento neutro 1;

3) $\forall a, b, c \in \mathbb{K}$, $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ *(distributiva della somma rispetto al prodotto)*.

Anche in questo caso, quando non vi sia possibilità di equivoco sulle operazioni che sono definite, il campo $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ si denoterà semplicemente con la lettera $\mathbb{K}$. Gli elementi di un campo $\mathbb{K}$ si dicono *scalari*.

Esempi 1.4. Con le usuali operazioni l'insieme dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, dei numeri reali $\mathbb{R}$ e dei numeri complessi $\mathbb{C}$ forniscono esempi di campi. D'altro canto l'insieme dei numeri naturali $\mathbb{N}$ e l'insieme dei numeri interi $\mathbb{Z}$ non sono campi.

Proposizione 1.5. *Sia $\mathbb{K}$ un campo, allora $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot \mu = 0$ se e solo se $\lambda = 0$ oppure $\mu = 0$.*

Dimostrazione. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$. Se $\mu = 0$, $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0$. Pertanto $0 = \lambda \cdot 0 - \lambda \cdot 0 = (\lambda \cdot 0 + \lambda \cdot 0) - \lambda \cdot 0 = \lambda \cdot 0$. Similmente se $\lambda = 0$.

Viceversa, se $\lambda \cdot \mu = 0$, con $\mu \neq 0$, allora $\lambda = \lambda \cdot (\mu \cdot \mu^{-1}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \mu^{-1} = 0 \cdot \mu^{-1} = 0$. $\square$

1.2 Matrici

Sia $\mathbb{K}$ un campo e siano n, m interi positivi. Una *matrice* $m \times n$ ad elementi in $\mathbb{K}$ è una tabella rettangolare

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

di mn elementi di $\mathbb{K}$. Scriveremo anche $A = (a_{ij})$. La *i–esima riga* di A è la matrice $1 \times n$

$$A^{(i)} = (a_{i1} \dots a_{in}), \;\; 1 \leq i \leq m,$$

La *j–esima colonna* di A è la matrice $m \times 1$

$$A_{(j)} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \;\; 1 \leq j \leq n.$$

Ogni elemento di una matrice è contrassegnato da due indici: il primo è l'indice riga, il secondo è l'indice colonna. L'elemento a_{ij} è anche detto *elemento di A di posto i, j*. Se $m = n$, la matrice A si dice *quadrata di ordine n*. L'insieme di tutte le matrici $m \times n$ ad elementi in $\mathbb{K}$ si denota con $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, mentre l'insieme delle matrici quadrate di ordine n si denota con $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Sia $\lambda \in \mathbb{K}$, il prodotto dello scalare λ per la matrice A è la matrice $\lambda A = (\lambda a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$.

Proposizione 1.6. *i) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;*

ii) $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$;

iii) $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $1A = A$.

Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è una matrice quadrata, gli elementi $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ costituiscono la *diagonale principale* di A. Si definisce *traccia* della matrice A e si denota con $Tr(A)$ la somma degli elementi della diagonale principale della matrice A. Pertanto $Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$. A si dice *triangolare superiore* se $a_{ij} = 0$ per ogni $i > j$, mentre si dice *triangolare inferiore* se $a_{ij} = 0$ per ogni $i < j$. Una matrice $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *diagonale* se $a_{ij} = 0$ se $i \neq j$. Una particolare matrice diagonale è la *matrice identità* I_n

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

La *trasposta* di A è la matrice $n \times m$ ottenuta scambiando tra loro le righe e le colonne di A:

$$A^t = (a_{ji}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

A si dice *simmetrica* se $A^t = A$, mentre si dice *antisimmetrica* se $A^t = -A$. Denoteremo con $Sym_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici simmetriche di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, mentre denoteremo con $ASym_n(\mathbb{K})$ l'insieme delle matrici antisimmetriche di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposizione 1.7. *i)* $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(A^t)^t = A$;

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $(\lambda A)^t = \lambda A^t$;

1.2.1 Somma tra matrici

La somma tra matrici è l'operazione interna su $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ che associa a due matrici $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice $A + B = C = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, dove $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.

Proposizione 1.8. $(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}), +)$ *è un gruppo abeliano. Infatti:*

i) $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A + B = B + A$;

ii) $\forall A, B, C \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A + (B + C) = (A + B) + C$;

iii) $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}$, $A + \mathbf{0} = \mathbf{0} + A = A$;

iv) $\forall A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A - A = -A + A = \mathbf{0}$;

Proposizione 1.9. $\forall A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A^t + B^t = (A + B)^t$.

Dimostrazione. Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, allora l'elemento di posto p, s della matrice $(A + B)^t$ coincide con l'elemento di posto s, p della matrice $A + B$ che pertanto risulta essere $a_{sp} + b_{sp}$. D'altro canto l'elemento di posto p, s della matrice $A^t + B^t$ è $a_{sp} + b_{sp}$ e pertanto $(A + B)^t = A^t + B^t$. □

1.2.2 Prodotto righe per colonne

Dato un vettore riga $A = (a_{1i}) \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{K})$ ed un vettore colonna $B = (b_{j1}) \in \mathcal{M}_{n,1}$, il loro *prodotto* è l'elemento di $\mathbb{K}$ definito come segue

$$(a_{11}a_{12}\dots a_{1n})\begin{pmatrix} b_{11} \\ b_{21} \\ \vdots \\ b_{n1} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^{n} a_{1k}b_{k1} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \ldots + a_{1n}b_{n1}$$

Più in generale, se $A = (a_{il}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{kj}) \in \mathcal{M}_{n,p}$, il loro *prodotto righe per colonne* è una matrice $AB = (c_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$, dove c_{ij} è il prodotto dell'i–esima riga di A per la j–esima colonna di B.

$$AB = (A^{(i)}B_{(j)}) = (c_{ij}), \quad \text{dove } c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{in}b_{nj}$$

Osservazione 1.10. Date due matrici A e B, è possibile definire la matrice prodotto AB se il numero delle colonne di A coincide con il numero delle righe di B.

Osservazione 1.11. In generale $AB \neq BA$. Infatti, se

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}),$$

allora

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = BA$$

Proposizione 1.12. *Se $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $C, D \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $E \in \mathcal{M}_{p,s}(\mathbb{K})$, $k \in \mathbb{K}$, allora*

1) $(A + B)C = AC + BC$,

2) $A(C + D) = AC + AD$,

3) $A(kC) = k(AC) = (kA)C$,

4) $A(CE) = (AC)E$,

5) $AI_n = A$, $I_nC = C$.

Dimostrazione. 1) Sia $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, $C = (c_{ij})$. L'elemento di posto i, k della matrice $(A + B)C$ si ottiene moltiplicando la i–esima riga della matrice $A + B$ per la k–esima colonna della matrice C. Pertanto

$$(A + B)^{(i)}C_{(k)} = (a_{i1} + b_{i1} \dots a_{in} + b_{in})(c_{1k} \dots c_{nk})^t = \sum_{j=1}^{n}(a_{ij} + b_{ij})c_{jk} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{jk} + \sum_{j=1}^{n} b_{ij}c_{jk} = (a_{i1} + \dots a_{in})(c_{1k} \dots c_{nk})^t + (b_{i1} \dots b_{in})(c_{1k} \dots c_{nk})^t =$$

$$= A^{(i)}C_{(k)} + B^{(i)}C_{(k)}.$$

Si ha, dunque, che l'elemento di posto i, k della matrice $(A+B)C$ coincide con la somma dell'elemento di posto i, k della matrice AC con l'elemento di posto i, k della matrice BC, come volevasi.

Le proprietà 2) e 3) si dimostrano in maniera analoga alla 1).

4) Si noti che la i–esima riga di AC risulta

$$(AC)^{(i)} = \left(A^{(i)}C_{(1)}\ A^{(i)}C_{(2)} \dots A^{(i)}C_{(p)}\right),$$

mentre, se $E = (e_{ij})$, la h–esima colonna di CE è

$$(CE)_{(h)} = \left(C^{(1)}E_{(h)}\ C^{(2)}E_{(h)} \dots C^{(n)}E_{(h)}\right)^t.$$

Pertanto, l'elemento di posto i, h della matrice $(AC)E$ è

$$\begin{aligned}
(AC)^{(i)} E_{(h)} = \left(A^{(i)}C_{(1)}\ A^{(i)}C_{(2)} \dots A^{(i)}C_{(p)}\right)(e_{1h}\ e_{2h} \dots e_{ph})^t = \\
= A^{(i)}C_{(1)}e_{1h} + A^{(i)}C_{(2)}e_{2h} + \dots + A^{(i)}C_{(p)}e_{ph} = \\
= (a_{i1}c_{11} + \cdots + a_{in}c_{n1})e_{1h} + (a_{i1}c_{12} + \dots + a_{in}c_{n2})e_{2h} + \dots + (a_{i1}c_{1p} + \dots + a_{in}c_{np})e_{ph} = \\
= a_{i1}(c_{11}e_{1h} + \dots + c_{1p}e_{ph}) + a_{i2}(c_{21}e_{1h} + \dots + c_{2p}e_{ph}) + \dots + a_{in}(c_{n1}e_{1h} + \dots + c_{np}e_{ph}) = \\
= a_{i1}C^{(1)}E_{(h)} + a_{i2}C^{(2)}E_{(h)} + \dots + a_{in}C^{(n)}E_{(h)} = \\
= (a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in})\left(C^{(1)}E_{(h)}\ C^{(2)}E_{(h)} \dots C^{(n)}E_{(h)}\right)^t = A^{(i)}\,(CE)_{(h)}
\end{aligned}$$

e quindi coincide con l'elemento di posto i, h della matrice $A(CE)$. Se ne deduce che $A(CE) = (AC)E$ come volevasi.

5) L'elemento di posto i, j della matrice AI_n è

$$A^{(i)}I_{n_{(j)}} = (a_{i1}\ a_{i2} \dots a_{in})(0\ 0 \dots 0\ 1\ 0 \dots 0)^t = a_{ij}$$

e pertanto coincide con l'elemento di posto i, j della matrice A. Segue che $AI_n = A$. Analogamente si dimostra che $I_nC = C$. □

Proposizione 1.13. *Se A e B possono essere moltiplicate, allora A^t e B^t possono essere moltiplicate e $(AB)^t = B^tA^t$.*

Dimostrazione. Se $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, allora $A \in \mathcal{M}_{n,m}(\mathbb{K})$ e $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Pertanto è possibile definire la matrice B^tA^t. Inoltre l'elemento di posto i, j della matrice B^tA^t è

$$B^{t^{(i)}}A^t_{(j)} = A^{(j)}B_{(i)}$$

e dunque coincide con l'elemento di posto j, i della matrice AB. D'altro canto, si noti che l'elemento di posto j, i della matrice AB coincide con l'elemento di posto i, j della matrice $(AB)^t$. Ne segue che $(AB)^t = B^tA^t$. □

2 Spazi vettoriali su un campo

Sia $\mathbb{K}$ un campo. Uno *spazio vettoriale su* $\mathbb{K}$ (o $\mathbb{K}$–*spazio vettoriale*) è un insieme non vuoto V dotato di due operazioni interne

$$(\mathbf{v},\mathbf{w}) \in V \times V \longmapsto \mathbf{v}+\mathbf{w} \in V, \quad (\lambda,\mathbf{v}) \in \mathbb{K} \times V \longmapsto \lambda\mathbf{v} \in V$$

dette *somma* e *prodotto per uno scalare*, rispettivamente, in modo che le seguenti proprietà siano soddisfatte:

1) $(V,+)$ è un gruppo abeliano.

2) $\forall \mathbf{v} \in V$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$, $(\lambda+\mu)\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}+\mu\mathbf{v}$ *(distributività rispetto alla somma di scalari)*

3) $\forall \mathbf{v},\mathbf{w} \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\lambda(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \lambda\mathbf{v}+\lambda\mathbf{w}$ *(distributività rispetto alla somma di vettori)*

4) $\forall \mathbf{v} \in V$, $\forall \lambda,\mu \in \mathbb{K}$, $\lambda(\mu\mathbf{v}) = (\lambda\mu)\mathbf{v}$

5) $\forall \mathbf{v} \in V$, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$.

Gli elementi di V si dicono *vettori*. Se $k \in \mathbb{K}$, i vettori $\mathbf{v}$ e $k\mathbf{v}$ si dicono *proporzionali* o *multipli*.

Esempi 2.1. 1. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia $n \geq 1$ un intero. Sia $V = \mathbb{K}^n = \mathbb{K} \times \ldots \times \mathbb{K} = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n) \in \mathbb{K}^n \mid x_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}$. Se definiamo la somma di due elementi $(x_1,x_2,\ldots,x_n),(y_1,y_2,\ldots,y_n) \in \mathbb{K}^n$ come

$$(x_1,x_2,\ldots,x_n)+(y_1,y_2,\ldots,y_n) = (x_1+y_1,x_2+y_2,\ldots,x_n+y_n)$$

e il prodotto per uno scalare $k \in \mathbb{K}$ come

$$k(x_1,x_2,\ldots,x_n) = (kx_1,kx_2,\ldots,kx_n),$$

allora è immediato verificare che, con queste operazioni, $\mathbb{K}^n$ è un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale (detto anche n–*spazio numerico su* $\mathbb{K}$).

2. Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia D un insieme non vuoto. Sia $V = \{f : D \longrightarrow \mathbb{K} \mid f \text{ applicazione}\}$. Se definiamo la somma di due funzioni $f,g \in V$ e il prodotto per uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ come segue:

$$f+g : x \in D \longmapsto f(x)+g(x) \in \mathbb{K}, \quad \lambda f : x \in D \longmapsto \lambda f(x) \in \mathbb{K},$$

allora è immediato verificare che, con queste operazioni, V è un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale.

3. L'insieme $\mathbb{R}[X]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata X è un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma tra polinomi e prodotto di un polinomio per uno scalare.

4. Sia $n \geq 1$ un intero. L'insieme dei polinomi di grado minore o uguale a n a coefficienti in $\mathbb{K}$:
$$\mathbb{K}_n[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + \ldots + a_nX^n \mid a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}\}$$
è un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale rispetto alle usuali operazioni di somma tra polinomi e prodotto di un polinomio per uno scalare.

5. L'insieme $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ delle matrici $m \times n$ ad elementi in $\mathbb{K}$, dotato delle operazioni di somma e moltiplicazione per uno scalare, è uno spazio vettoriale sul campo $\mathbb{K}$. Il vettore nullo di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ è la matrice nulla (che denoteremo con $\mathbf{0}$), ossia la matrice $m \times n$ i cui elementi sono tutti uguali a zero.

Esercizi 2.2. 1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ due numeri fissati e poniamo $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\}$ l'insieme delle soluzioni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ dell'equazione lineare omogenea $ax + by = 0$. Dimostrare che S è un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale.

2. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$ numeri fissati, dove $c \neq 0$. Dimostrare che $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by + c = 0\}$ non è uno spazio vettoriale.

Proposizione 2.3. *Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale.*

a) In V esiste un unico vettore nullo.

b) $\forall \mathbf{v} \in V$, esiste un unico opposto.

c) $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v} \in V$, $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ se e solo se $\lambda = 0$ oppure $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. a) Siano $\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_2 \in V$ due vettori nulli. Allora $\forall \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{0}_1 + \mathbf{v} = \mathbf{0}_2 + \mathbf{v} = \mathbf{v}$. Pertanto $\mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_1$ e $\mathbf{0}_2 + \mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_2$. Quindi $\mathbf{0}_1 = \mathbf{0}_1 + \mathbf{0}_2 = \mathbf{0}_2$.

b) Sia $\mathbf{v}_1 \in V$ tale che $\mathbf{v} + \mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$. Allora $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{0} = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v} - \mathbf{v}) = (\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}) - \mathbf{v} = \mathbf{0} - \mathbf{v} = -\mathbf{v}$.

c) Se $\lambda = 0$, poichè $0\mathbf{v} = (0 + 0)\mathbf{v} = 0\mathbf{v} + 0\mathbf{v}$, si ha $\lambda\mathbf{v} = 0\mathbf{v} = 0\mathbf{v} - 0\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Analogamente, se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, poichè $\lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0} + \lambda\mathbf{0}$, si ha $\lambda\mathbf{v} = \lambda\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0} - \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$.

Viceversa, sia $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Se $\lambda \neq 0$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}/\lambda = \mathbf{0}$, contraddizione. Quindi $\lambda = 0$. Similmente, se $\lambda\mathbf{v} = \mathbf{0}$ e $\lambda \neq 0$, allora $\mathbf{v} = (\lambda^{-1}\lambda)\mathbf{v} = \lambda^{-1}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$. □

2.1 Sottospazi vettoriali

Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale. Un sottoinsieme non vuoto W di V si dice *sottospazio vettoriale* di V se

1) $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \in W$,

2) $\forall \mathbf{w} \in W$, $\forall k \in \mathbb{K}$, $k\mathbf{w} \in W$.

Le due condizioni precedenti sono equivalenti alla seguente:

3) $\forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, $\forall k, k' \in \mathbb{K}$, $k\mathbf{w} + k'\mathbf{w}' \in W$.

Infatti se vale la 3) allora, posto $k = k' = 1$ vale la 1), mentre per $k' = 0$ vale la 2). Viceversa se valgono 1) e 2), allora $k\mathbf{w}, k'\mathbf{w}' \in W$ e $k\mathbf{w} + k'\mathbf{w}' \in W$ e quindi vale la 3). Dalla proprietà 2), considerati gli scalari 0 e -1, rispettivamente, si ha che $\forall \mathbf{w} \in W$, $\mathbf{0} = 0\mathbf{w} \in W$ e $-\mathbf{w} \in W$. In particolare è possibile verificare che W soddisfa tutti gli assiomi che definiscono uno spazio vettoriale e che quindi W è esso stesso uno spazio vettoriale.

Osservazione 2.4. Si noti che se W è un sottospazio vettoriale di V e U è un sottospazio vettoriale di W, allora U è sottospazio vettoriale di V, mentre se U e W sono sottospazi vettoriali di V e $U \subset W$, allora U è sottospazio vettoriale di W.

Esempi 2.5.

1. V e $\{\mathbf{0}\}$ sono sottospazi vettoriali, detti *banali*.

2. Sia $\mathbf{v} \in V$, l'insieme $\langle \mathbf{v} \rangle = \{k\mathbf{v} \mid k \in \mathbb{K}\}$ costituito dai multipli di $\mathbf{v}$ è un sottospazio vettoriale di V, detto *sottospazio generato da* $\mathbf{v}$.

3. Siano $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. L'insieme $H = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n \mid a_1x_1 + \ldots a_nx_n = 0\}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$. Infatti, $\forall (x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in H$, $\forall k \in \mathbb{K}$, si ha

$$a_1(x_1+y_1)+\ldots+a_n(x_n+y_n) = (a_1x_1+\ldots+a_nx_n)+(a_1y_1+\ldots+a_ny_n) = 0+0 = 0,$$

$$a_1(kx_1) + \ldots + a_n(kx_n) = k(a_1x_1 + \ldots + a_nx_n) = k0 = 0.$$

Pertanto $(x_1, \ldots, x_n) + (y_1, \ldots, y_n) \in H$ e $k(x_1, \ldots, x_n) \in H$, come volevasi.

Esercizi 2.6.

1. Stabilire se l'insieme $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+z \geq 0\}$ è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$.

2. Dimostrare che ciascuno dei seguenti insiemi è un sottospazio di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}, \quad W = \{(x, 0, z) \mid x, z \in \mathbb{R}\}, \quad W' = \{(x, x, x) \mid x \in \mathbb{R}\};$$

si determini, inoltre, $U \cap W$ e $U \cap W'$.

3. Verificare che ciascuno dei seguenti insiemi è un sottospazio vettoriale di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- l'insieme delle matrici diagonali di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$;
- l'insieme delle matrici di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ aventi traccia nulla;
- $Sym_n(\mathbb{K})$;
- $ASym_n(\mathbb{K})$.

2.1.1 Sottospazi somma e intersezione

Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V. Si consideri l'intersezione

$$U \cap W = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \in U \text{ e } \mathbf{v} \in W\}.$$

Si verifica facilmente che $U \cap W$ è ancora un sottospazio di V.

D'altro canto l'unione di due sottospazi U e W

$$U \cup W = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \in U \text{ oppure } \mathbf{v} \in W\}$$

non definisce un sottospazio di V. Infatti se $V = \mathbb{R}^2$, $U = \{(x, 0) \in V \mid x \in \mathbb{R}\}$ e $W = \{(0, y) \in V \mid y \in \mathbb{R}\}$, allora il vettore $(1, 0) \in U$ e il vettore $(0, 1) \in W$. Quindi $(1, 0), (0, 1) \in U \cup W$, ma $(1, 0) + (0, 1) = (1, 1) \notin U \cup W$.

Consideriamo il seguente sottoinsieme di V:

$$U + W = \{\mathbf{u} + \mathbf{w} \in V \mid \mathbf{u} \in U, \mathbf{w} \in W\}.$$

$U + W$ è un sottospazio vettoriale di V. Infatti $\forall \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \in U$, $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in W$, $\forall k \in \mathbb{K}$, se $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1), (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) \in U + W$, allora $(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) + (\mathbf{u}_2 + \mathbf{w}_2) = (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2) \in U + W$ e $k(\mathbf{u}_1 + \mathbf{w}_1) = k\mathbf{u}_1 + k\mathbf{w}_1 \in U + W$. $U + W$ è detto *sottospazio somma di U e W*. Se $U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, allora $U + W$ è detto *somma diretta* e si denota con $U \oplus W$.

Osservazione 2.7. Si noti che $U \cap W \subset U \cup W \subset U + W$. Infatti $\forall \mathbf{u} \in U$, $\forall \mathbf{w} \in W$, $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \mathbf{0} \in U + W$ e $\mathbf{w} = \mathbf{0} + \mathbf{w} \in U + W$, pertanto $U \subset U + W$ e $W \subset U + W$.

Proposizione 2.8. *Ogni vettore di $U \oplus W$ si esprime in modo unico come somma di un vettore di U e di un vettore di W.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{u}, \mathbf{u}' \in U$, $\mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$ tali che $\mathbf{u} + \mathbf{w} = \mathbf{u}' + \mathbf{w}'$. Allora $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w} \in U \cap W = \{\mathbf{0}\}$, pertanto $\mathbf{u} - \mathbf{u}' = \mathbf{w}' - \mathbf{w} = \mathbf{0}$ e $\mathbf{u} = \mathbf{u}'$, $\mathbf{w} = \mathbf{w}'$. $\square$

2.2 Lineare dipendenza e lineare indipendenza

Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$. Il vettore $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ si dice *combinazione lineare* dei vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Gli scalari $a_1, \ldots, a_n$ si dicono *coefficienti della combinazione lineare.*

Se $a_i = 0$, per ogni $1 \leq i \leq n$, allora la combinazione lineare $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ si dice *combinazione lineare banale* di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Altrimenti si dice *non banale.*

Osservazione 2.9. Se $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$, la combinazione lineare $0\mathbf{v} + a\mathbf{0} = 0$ è non banale.

Le combinazioni lineari di un vettore $\mathbf{v} \in V$ sono i suoi multipli. Inoltre, dalla definizione di sottospazio, se W è sottospazio vettoriale di V e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in W$, allora ogni combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ è un vettore appartenente a W.

Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$. Consideriamo il sottoinsieme di V costituito dalle combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$:

$$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = \{a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n \in V \mid a_i \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n\}.$$

$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ è un sottospazio vettoriale di V. Infatti $\forall a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n, b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, $\forall k \in \mathbb{K}$, allora

$$(a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n) + (b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n) = (a_1 + b_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (a_n + b_n)\mathbf{v}_n \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$$

e

$$k(a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n) = ka_1\mathbf{v}_1 + \ldots + ka_n\mathbf{v}_n \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle.$$

$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ è detto *sottospazio generato da* $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Il prossimo risultato mostra che $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ è il più piccolo sottospazio di V contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.

Proposizione 2.10. *$\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ è uguale all'intersezione di tutti i sottospazi di V che contengono $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.*

Dimostrazione. Denotiamo con W l'intersezione di tutti i sottospazi di V che contengono $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$. Poichè $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$ è un sottospazio di V contenente $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, si ha $W \subseteq \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. D'altro canto W, essendo un sottospazio, contiene tutte le combinazioni lineari dei suoi vettori. In particolare, poichè $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in W$, W contiene tutte le combinazioni lineari di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Pertanto $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle \subseteq W$. Quindi $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = W$. □

Se $V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, allora si dirà che i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ *generano* V oppure che l'insieme $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un *sistema di generatori di* V.

Osservazione 2.11. *i)* I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V se e solo se $\forall \mathbf{v} \in V$, $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ tale che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$.

ii) Se $1 \leq m \leq n$, allora $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m \rangle$ è sottospazio di $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$.

Esercizi 2.12. 1. Stabilire se il vettore $\mathbf{v} = (2, 3, 1)$ di $\mathbb{R}^3$ appartiene allo spazio vettoriale generato dai vettori $\mathbf{w}_1 = (1, 1, 2)$ e $\mathbf{w}_2 = (5, 7, 4)$.

2. Siano U, W sottospazi di $\mathbb{R}^3$. Stabilire se la somma di U e W è diretta e determinare un sistema di generatori per il sottospazio somma $U + W$.

   - $U = \{(x, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(z, z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}$,
   - $U = \{(x + y, y, 0) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$, $W = \{(x + y, 0, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$.

I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ si definiscono *linearmente dipendenti* se $\exists\, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli tali che

$$a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Altrimenti, i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ si dicono *linearmente indipendenti*. Equivalentemente i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti se vale la seguente proprietà:

$$\text{se } \forall a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}, \text{ tali che } a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}, \text{ allora } a_1 = \ldots = a_n = 0.$$

In altri termini, i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti se la loro unica combinazione lineare che è uguale al vettore nullo è la combinazione lineare banale.

Esempi 2.13. 1. I vettori di $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{v} = (1, 2, 1)$, $\mathbf{w} = (2, 0, -1)$ e $\mathbf{u} = (3, 2, 0)$ sono linearmente dipendenti, infatti si ha $\mathbf{v} + \mathbf{w} - \mathbf{u} = \mathbf{0}$.

2. I vettori di $\mathbb{R}^3$: $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$ e $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ sono linearmente indipendenti.

Esercizi 2.14. 1. Siano $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 1), \mathbf{v}_2 = (3, 2, 5, 1), \mathbf{v}_3 = (0, 4, 4, -4)$ vettori di $\mathbb{R}^4$. Dimostrare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

Siano $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ tali che

$$\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 + \lambda_3\mathbf{v}_3 = (\lambda_1 + 3\lambda_2, 2\lambda_2 + 4\lambda_3, \lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3) = (0, 0, 0).$$

Allora

$$\begin{cases} \lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 = 0 \end{cases},$$

da cui si ottiene che $\lambda_1 = -3\lambda_2$, $\lambda_3 = -\lambda_2/2$. Pertanto esiste una combinazione non banale di $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ che è uguale al vettore nullo, ad esempio:

$$-6\mathbf{v}_1 + 2\mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Quindi i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente dipendenti.

2. Siano $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (2, 0, 1), \mathbf{w}_1 = (3, 0, 2), \mathbf{w}_2 = (1, 0, 0)$ vettori di $\mathbb{R}^3$. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$V = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle, \ W = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle.$$

Dimostrare che $V = W$.

Si osservi che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W$ e che $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$. Infatti

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{2}\mathbf{w}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{w}_2, \ \mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{w}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{w}_2,$$
$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \ \mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1.$$

Si noti ora che $\forall\, \mathbf{v} \in V$, $\exists\, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{v} = \lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2$. Ma allora $\mathbf{v} \in W$, poichè $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in W$ e quindi $V \subseteq W$. Analogamente $\forall\, \mathbf{w} \in W$, $\exists\, \mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{w} = \mu_1\mathbf{w}_1 + \mu_2\mathbf{w}_2$. Ma allora $\mathbf{w} \in V$, poichè $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in V$ e quindi $W \subseteq V$. Pertanto $V = W$.

3. Si considerino i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

$$U = \langle (1,0,-1), (-1,2,1) \rangle, \ W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ | \ x+z = y+2z = 0\}.$$

   Determinare $U \cap W$.

   $\forall\, \mathbf{u} \in U, \exists\, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{u} = \alpha(1,0,-1) + \beta(-1,2,1) = (\alpha - \beta, 2\beta, -\alpha + \beta)$. Il vettore $\mathbf{u}$ appartiene a W se e solo se

$$\begin{cases} \alpha - \beta - \alpha + \beta = 0 \\ 2\beta - 2(\alpha - \beta) = 0 \end{cases}$$

   Pertanto $\alpha = 2\beta$ e $U \cap W = \{(\beta, 2\beta, -\beta) \ | \ \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1,2,-1) \rangle$.

4. Determinare due sottospazi vettoriali U, W di $\mathbb{R}^4$ tali che $\mathbb{R}^4 = U + W$ senza che la somma sia diretta.

   È possibile scegliere $U = \langle (1,0,0,0), (0,1,0,0) \rangle$, $W = \langle (0,1,0,0), (0,0,1,0), (0,0,0,1) \rangle$. In tal caso $U + W = \mathbb{R}^4$, ma la somma non è diretta, poichè $U \cap W = \langle (0,1,0,0) \rangle$.

Esercizi 2.15. 1. Determinare se i seguenti vettori sono linearmente dipendenti o indipendenti.

   - $\mathbf{v}_1 = (1,1,1), \mathbf{v}_2 = (1,-1,1), \mathbf{v}_3 = (2,0,2)$,
   - $\mathbf{v}_1 = (-1,2,3), \mathbf{v}_2 = (0,-1,0), \mathbf{v}_3 = (1,0,1)$,
   - $\mathbf{v}_1 = (1,2,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,-1,0,1), \mathbf{v}_3 = (-1,2,-1,0), \mathbf{v}_4 = (-1,1,0,-1), \mathbf{v}_5 = (1,1,0,1)$.

2. Determinare per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ i vettori $\mathbf{v}_1 = (1,2,0)$, $\mathbf{v}_2 = (0,1,a)$, $\mathbf{v}_3 = (1,a,-1)$ di $\mathbb{R}^3$ sono linearmente indipendenti.

Osservazione 2.16. Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale e sia $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$. Allora $\mathbf{v}$ è linearmente indipendente. Infatti, se $\alpha\mathbf{v} = \mathbf{0}$, per qualche $\alpha \in \mathbb{K}$, allora, dalla Proposizione 2.3, *c*), necessariamente $\alpha = 0$.

Proposizione 2.17. *I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, $n \geq 2$, sono linearmente dipendenti se e solo se almeno uno di essi si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti, allora $\exists\ a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, non tutti nulli, tali che $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Sia j, con $1 \leq j \leq n$ tale che $a_j \neq 0$, allora $a_j\mathbf{v}_j = -(a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \ldots + a_n\mathbf{v}_n)$. Pertanto $\mathbf{v}_j$ è combinazione lineare dei rimanenti:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_j &= -a_j^{-1}(a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} + a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} + \ldots + a_n\mathbf{v}_n) = \\ &= -a_j^{-1}a_1\mathbf{v}_1 - \ldots - a_j^{-1}a_{j-1}\mathbf{v}_{j-1} - a_j^{-1}a_{j+1}\mathbf{v}_{j+1} - \ldots - a_j^{-1}a_n\mathbf{v}_n. \end{aligned}$$

Viceversa, se per qualche i, $1 \le i \le n$, $\mathbf{v}_i$ è combinazione lineare dei rimanenti, allora $\mathbf{v}_i = b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} + b_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \ldots + b_n\mathbf{v}_n$. Pertanto

$$\mathbf{0} = b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_{i-1}\mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i + b_{i+1}\mathbf{v}_{i+1} + \ldots + b_n\mathbf{v}_n$$

è una combinazione lineare non banale di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Ne segue che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente dipendenti. $\square$

Osservazione 2.18. *i*) Se un insieme di vettori contiene il vettore nullo, allora esso è un insieme di vettori linearmente dipendenti.

ii) Aggiungendo un vettore qualsiasi ad un insieme di vettori linearmente dipendenti, si ottiene ancora un insieme di vettori linearmente dipendenti.

iii) Aggiungendo un vettore qualsiasi ad un sistema di generatori, si ottiene ancora un sistema di generatori.

Osservazione 2.19. Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale e siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$. Allora

1. $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

   Infatti $\forall\, \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k = a_2\mathbf{v}_2 + a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k \in \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$ e viceversa.

2. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}, \alpha \neq 0$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \alpha\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

   Infatti $\forall\, \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k = \frac{a_1}{\alpha}(\alpha\mathbf{v}_1) + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k \in \langle \alpha\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. Viceversa $\forall\, \mathbf{w} \in \langle \alpha\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, $\mathbf{w} = a_1(\alpha\mathbf{v}_1) + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k = (a_1\alpha)\mathbf{v}_1 + a_2\mathbf{v}_2 + \ldots + a_k\mathbf{v}_k \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

3. $\forall\, \alpha \in \mathbb{K}$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle = \langle \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, dove $1 \le j \le k$.

   Infatti $\forall\, \mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_j\mathbf{v}_j + \ldots + a_k\mathbf{v}_k = a_1(\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_j) + \ldots + (a_j - a_1\alpha)\mathbf{v}_j + \ldots + a_k\mathbf{v}_k \in \langle \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. Viceversa $\forall\, \mathbf{w} \in \langle \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_j, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, $\mathbf{w} = a_1(\mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_j) + \ldots + a_j\mathbf{v}_j + \ldots + a_k\mathbf{v}_k = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + (a_1\alpha + a_j)\mathbf{v}_j + \ldots + a_k\mathbf{v}_k \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$.

2.3 Basi e dimensione di uno spazio vettoriale

Un insieme di vettori $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ di V si dice *base di V* se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V e sono linearmente indipendenti.

Proposizione 2.20. *Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora ogni vettore di V si esprime in modo unico come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v} \in V$. Poiche $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V, allora $\mathbf{v}$ è combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Siano $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{v}_1 + \ldots + b_n\mathbf{v}_n$. Poichè $\mathbf{0} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n - b_1\mathbf{v}_1 - \ldots - b_n\mathbf{v}_n = (a_1 - b_1)\mathbf{v}_1 + \ldots + (a_n - b_n)\mathbf{v}_n$ e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, si ha $a_i - b_i = 0$, $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base del $\mathbb{K}$–spazio vettoriale V, sia $\mathbf{v}$ un vettore di V e sia $\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n$ l'unica espressione di $\mathbf{v}$ come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. Allora gli scalari $a_1, \ldots, a_n$ si dicono *coordinate* o *componenti* di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$.

Il prossimo risultato mostra che in uno spazio vettoriale V, il massimo numero di vettori linearmente indipendenti è minore o uguale al minimo numero di vettori che generano V.

Lemma 2.21. *Siano $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ un sistema di generatori di V e siano $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m \in V$. Se $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ sono linearmente indipendenti, allora $m \leq n$.*

Dimostrazione. Poichè $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V, ogni vettore di V si può scrivere come combinazione lineare di $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$. In particolare $\mathbf{w}_1 = k_1\mathbf{v}_1 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$. Inoltre almeno uno dei coefficienti $k_1, \ldots, k_n$ deve essere diverso da zero, altrimenti si avrebbe $\mathbf{w}_1 = 0$ (e di conseguenza $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ sarebbero dipendenti). Non è restrittivo supporre che sia $k_1 \neq 0$. Allora $\mathbf{v}_1$ è combinazione lineare di $\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$. In questo modo abbiamo costruito un nuovo sistema di n generatori per $V = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Ripetiamo il procedimento per $\mathbf{w}_2$. Poichè $\mathbf{w}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V, si potrà scrivere $\mathbf{w}_2 = h_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + k_3\mathbf{v}_3 + \ldots + k_n\mathbf{v}_n$. Almeno uno dei coefficienti $k_2, \ldots, k_n$ è diverso da zero (altrimenti si avrebbe $\mathbf{w}_2 = h_1\mathbf{w}_1$, contro l'ipotesi di indipendenza lineare di $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$). Al solito, non è restrittivo supporre $k_2 \neq 0$. Ne segue che $\mathbf{v}_2$ è combinazione lineare di $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n$ e quindi abbiamo costruito un nuovo sistema di generatori per $V = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_3, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Supponiamo ora, per assurdo, che sia $m > n$. Se iteriamo il procedimento descritto precedentemente n volte, otteniamo un sistema di generatori di V costituito da $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$. Ma allora il vettore $\mathbf{w}_{n+1}$ è combinazione lineare di $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$, contro l'ipotesi di indipendenza lineare dei vettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$. $\square$

Corollario 2.22. *Siano $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ due basi dello spazio vettoriale V. Allora $m = n$.*

Dimostrazione. Poichè $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ generano V e $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ sono linearmente indipendenti, per il Lemma precedente, si ha $m \leq n$. Analogamente, poichè $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ generano V e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m$ sono linearmente indipendenti, si ha $n \leq m$. $\square$

Un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale V *ha dimensione finita* se esiste una base di V costituita da un insieme finito di vettori di V. Si noti che due basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

La *dimensione* di uno spazio vettoriale di dimensione finita è il numero di elementi di una sua qualsiasi base. La dimensione di V si denota con $\dim V$.

Una base per lo spazio vettoriale costituito dal solo vettore nullo $V = \{\mathbf{0}\}$ è l'insieme vuoto $\emptyset$ e la sua dimensione è zero ($\dim\{\mathbf{0}\} = 0$).

Osservazione 2.23. Può accadere che uno spazio vettoriale non abbia dimensione finita, in quanto non esista un insieme finito di vettori che lo generi. Ad esempio lo spazio vettoriale $\mathbb{R}[X]$ dei polinomi a coefficienti reali nell'indeterminata X non ha dimensione finita. Infatti, sia $S = \{p_1, \ldots, p_n\}$ un qualunque insieme finito di polinomi di $\mathbb{R}[X]$. Sia h il massimo dei loro gradi. Allora ogni combinazione lineare di $p_1, \ldots, p_n$ e quindi ogni elemento del sottospazio vettoriale generato da S ha grado minore o uguale ad h. Pertanto il sottospazio vettoriale generato da S non può coincidere $\mathbb{R}[X]$.

Da ora in avanti considereremo soltanto spazi vettoriali di dimensione finita.

Esempi 2.24. 1. I vettori $\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$, $\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$ di $\mathbb{R}^3$ formano una base di $\mathbb{R}^3$, detta *base canonica di* $\mathbb{R}^3$.

2. In generale, l'insieme di vettori $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, \ldots, 0), \mathbf{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0), \ldots, \mathbf{e}_n = (0, \ldots, 0, 1)\}$ è una base di $\mathbb{K}^n$. Infatti $\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, $(x_1, \ldots, x_n) = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ e quindi $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ generano $\mathbb{K}^n$. Inoltre, se $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ sono tali che $a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_n\mathbf{e}_n = \mathbf{0}$, allora $(a_1, \ldots, a_n) = \mathbf{0}$, quindi $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0$ e $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ sono linearmente indipendenti. Ne segue che $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di $\mathbb{K}^n$ (detta *base canonica di* $\mathbb{K}^n$) e $\dim \mathbb{K}^n = n$.

3. Una base di $\mathbb{R}_n[X] = \{a_0 + a_1X + a_2X^2 + a_3X^3 + \ldots + a_nX^n \mid a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}\}$ è costituita da $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3, \ldots, X^n\}$.

4. Sia E_{ij} la matrice di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, definita come segue

$$E_{ij} = (e_{lk}), \quad e_{lk} = \begin{cases} 0 & \text{se} \quad (i,j) \neq (l,k) \\ 1 & \text{se} \quad (i,j) = (l,k) \end{cases},$$

L'insieme delle matrici $\{E_{11}, E_{12}, \ldots, E_{1n}, E_{21}, E_{22} \ldots, E_{mn}\}$ è una base di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Infatti $\forall A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $A = a_{11}E_{11} + \ldots + a_{mn}E_{mn}$ e quindi $E_{11}, \ldots, E_{mn}$ generano $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Inoltre, se $b_{11}, \ldots, b_{mn} \in \mathbb{K}$ sono tali che $b_{11}E_{11} + \ldots + b_{mn}E_{mn} = \mathbf{0}$, allora $(b_{ij}) = \mathbf{0}$, quindi $b_{11} = b_{12} = \ldots = b_{mn} = 0$ e $E_{11}, \ldots, E_{mn}$ sono linearmente indipendenti. Ne segue che $\{E_{11}, \ldots, E_{mn}\}$ è una base di $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ (detta *base canonica di* $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$) e $\dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})) = mn$.

5. Sia $\mathcal{S} = \{E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, \ldots, E_{1n} + E_{n1}, E_{23} + E_{32}, \ldots, E_{2n} + E_{n2}, \ldots, E_{n-1n} + E_{nn-1}\}$. Mostreremo che le $n(n+1)/2$ matrici di $\mathcal{S}$ formano una base di $Sym_n(\mathbb{K})$. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matrice simmetrica. Allora $A = A^t$ e quindi $a_{ij} = a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$. In altri termini, l'elemento di A di posto i, j è uguale all'elemento di A di posto j, i. Ne segue che

$$\begin{aligned} A = {} & a_{11}E_{11} + a_{22}E_{22} + \ldots + a_{nn}E_{nn} + a_{12}(E_{12} + E_{21}) + a_{13}(E_{13} + E_{31}) + \ldots + \\ & + a_{1n}(E_{1n} + E_{n1}) + a_{23}(E_{23} + E_{32}) + \ldots + a_{2n}(E_{2n} + E_{n2}) + \ldots + a_{n-1n}(E_{n-1n} + E_{nn-1}) \end{aligned}$$

e le matrici $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, \ldots, E_{1n} + E_{n1}, E_{23} + E_{32}, \ldots, E_{2n} + E_{n2}, \ldots, E_{n-1n} + E_{nn-1}$ generano $Sym_n(\mathbb{K})$. Inoltre, se $b_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \leq j$, sono tali che

$$\begin{aligned} & b_{11}E_{11} + \ldots + b_{nn}E_{nn} + b_{12}(E_{12} + E_{21}) + \ldots + b_{1n}(E_{1n} + E_{n1}) + \\ & + b_{23}(E_{23} + E_{32}) + \ldots + b_{2n}(E_{2n} + E_{n2}) + \ldots + b_{n-1n}(E_{n-1n} + E_{nn-1}) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

allora $b_{ij} = b_{ji}$ e $(b_{ij}) = \mathbf{0}$, quindi $b_{11} = b_{12} = \ldots = b_{nn} = 0$. Pertanto le matrici $E_{11}, E_{22}, \ldots, E_{nn}, E_{12} + E_{21}, E_{13} + E_{31}, \ldots, E_{1n} + E_{n1}, E_{23} + E_{32}, \ldots, E_{2n} + E_{n2}, \ldots, E_{n-1n} + E_{nn-1}$ sono linearmente indipendenti, $\mathcal{S}$ è una base di $Sym_n(\mathbb{K})$ e $\dim(Sym_n(\mathbb{K})) = n(n+1)/2$.

6. Sia $\mathcal{A} = \{E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, \ldots, E_{1n} - E_{n1}, E_{23} - E_{32}, \ldots, E_{2n} - E_{n2}, \ldots, E_{n-1n} - E_{nn-1}\}$. Mostreremo che le $n(n-1)/2$ matrici di $\mathcal{A}$ formano una base di $ASym_n(\mathbb{K})$. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matrice antisimmetrica. Allora $A^t = -A$ e quindi $a_{ij} = -a_{ji}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i \neq j$, e $a_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq n$. In altri termini, l'elemento di A di posto i, j, $i \neq j$, è uguale all'opposto dell'elemento di A di posto j, i, mentre gli elementi della diagonale principale di A sono nulli. Ne segue che

$$\begin{aligned} A = {} & a_{12}(E_{12} - E_{21}) + a_{13}(E_{13} - E_{31}) + \ldots + a_{1n}(E_{1n} - E_{n1}) + \\ & + a_{23}(E_{23} - E_{32}) + \ldots + a_{2n}(E_{2n} - E_{n2}) + \ldots + a_{n-1n}(E_{n-1n} - E_{nn-1}) \end{aligned}$$

e le matrici $E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, \ldots, E_{1n} - E_{n1}, E_{23} - E_{32}, \ldots, E_{2n} - E_{n2}, \ldots, E_{n-1n} - E_{nn-1}$ generano $Sym_n(\mathbb{K})$. Inoltre, se $b_{ij} \in \mathbb{K}$, $1 \leq i, j \leq n$, $i < j$, sono tali che

$$\begin{aligned} & b_{12}(E_{12} - E_{21}) + \ldots + b_{1n}(E_{1n} - E_{n1}) + b_{23}(E_{23} - E_{32}) + \ldots + b_{2n}(E_{2n} - E_{n2}) + \\ & \qquad + \ldots + b_{n-1n}(E_{n-1n} - E_{nn-1}) = \mathbf{0}, \end{aligned}$$

allora $b_{ij} = -b_{ji}$ e $(b_{ij}) = \mathbf{0}$, quindi $b_{11} = b_{12} = \ldots = b_{nn} = 0$. Pertanto le matrici $E_{12} - E_{21}, E_{13} - E_{31}, \ldots, E_{1n} - E_{n1}, E_{23} - E_{32}, \ldots, E_{2n} - E_{n2}, \ldots, E_{n-1n} - E_{nn-1}$ sono linearmente indipendenti, $\mathcal{A}$ è una base di $ASym_n(\mathbb{K})$ e $\dim(ASym_n(\mathbb{K})) = n(n-1)/2$.

Lemma 2.25. *$\mathcal{M}_n(\mathbb{K}) = Sym_n(\mathbb{K}) \oplus ASym_n(\mathbb{K})$.*

Dimostrazione. Sia $M = (c_{ij}) \in Sym_n(\mathbb{K}) \cap ASym_n(\mathbb{K})$. Allora, poichè $M \in ASym_n(\mathbb{K})$, si ha che $c_{ii} = 0$, $1 \leq i \leq n$, $c_{ij} = -c_{ji}$, $i \neq j$. D'altro canto, poichè $M \in Sym_n(\mathbb{K})$, si ha che $c_{ij} = c_{ji}$, $i \neq j$. Allora necessariamente $c_{ij} = 0$, $1 \leq i, j \leq n$, e $M = \mathbf{0}$. Ne segue che $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è somma diretta di $Sym_n(\mathbb{K})$ e $ASym_n(\mathbb{K})$. Si noti, infine, che $\forall\, A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si ha che $(A + A^t)/2 \in Sym_n(\mathbb{K})$, $(A - A^t)/2 \in ASym_n(\mathbb{K})$ e

$$A = \frac{A + A^t}{2} + \frac{A - A^t}{2}.$$

□

Esercizi 2.26. Determinare la dimensione ed una base dei seguenti sottospazi di $\mathbb{R}^4$:

1. $W_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_1 - x_4 = 0, x_2 + x_3 = 0\}$;

2. $W_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 \mid x_4 - x_2 + x_3 = 0\}$.

Teorema 2.27. *(Teorema del completamento ad una base)*
Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale tale che $\dim(V) = n$.

1) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ *sono linearmente indipendenti, allora* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *è una base di* V*.*

2) Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \in V$*,* $k < n$*, sono lineamente indipendenti, allora esistono* $\mathbf{v}_{k+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ *tali che* $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ *è una base di* V*.*

Dimostrazione. 1) È sufficiente mostrare che $\langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle = V$. Poichè $\dim(V) = n$ esiste una base $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ di V, in particolare $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ è un sistema di generatori di V. Sia $\mathbf{v} \in V$, con $\mathbf{v} \neq \mathbf{v}_i$, $i = 1, \ldots, n$. Se $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ fossero linearmente indipendenti, allora, dal Lemma 2.21, otterremmo che $n + 1 \leq n$, contraddizione. Pertanto $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}$ sono linearmente dipendenti ed esistono $a_1, \ldots, a_n, a \in \mathbb{K}$ non tutti nulli, tali che $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_n + a\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Se $a = 0$, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sarebbero linearmente dipendenti, contraddicendo l'ipotesi che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti. Pertanto $a \neq 0$ e $\mathbf{v} = -a^{-1}a_1\mathbf{v}_1 - \ldots - a^{-1}a_n\mathbf{v}_n$. Dunque $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$. Poichè $\mathbf{v}_i \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, si ha che $V = \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \rangle$, come volevasi.

2) Poichè $k < n$, i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ non generano V, altrimenti $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k\}$ sarebbe una base costituita da $k \neq n$ vettori. Pertanto esiste $\mathbf{v}_{k+1} \in V$ con $\mathbf{v}_{k+1} \notin \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$. Dimostriamo che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$ sono linearmente indipendenti. Siano $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} \in \mathbb{K}$ tali che $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_k + a_{k+1}\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{0}$, allora $a_{k+1} = 0$, altrimenti $\mathbf{v}_{k+1} = -a_{k+1}^{-1}a_1\mathbf{v}_1 - \ldots - a_{k+1}^{-1}a_k\mathbf{v}_k$. Ma allora $\mathbf{v}_{k+1} \in \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k \rangle$, che è una contraddizione. Ne segue che $a_1\mathbf{v}_1 + \ldots + a_n\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$ e $a_1 = a_2 = \ldots = a_k = 0$ in quanto $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k$ sono linearmente indipendenti per ipotesi. Allora $a_1 = \ldots = a_k = a_{k+1} = 0$ e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}$ sono linearmente indipendenti. Se $k + 1 = n$, il risultato segue da 1). Se $k + 1 < n$, allora possiamo ripetere il ragionamento precedente e trovare $\mathbf{v}_{k+2} \in V \setminus \langle \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1} \rangle$ tale che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}$ siano linearmente indipendenti. Iterando questo procedimento $n - k$ volte è possibile trovare $\mathbf{v}_{k+1}, \mathbf{v}_{k+2}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ tali che $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ siano linearmente indipendenti. Allora da 1) $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V. □

Corollario 2.28. *Il numero di elementi di una base di* V *coincide con il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in* V*.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V e sia r il massimo numero di vettori linearmente indipendenti in V. Poichè i vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono generatori di V, dal Lemma 2.21 si ha che $r \leq n$. D'altro canto $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono n vettori linermente indipendenti, quindi $r = n$. □

Teorema 2.29. *Sia* V *un* $\mathbb{K}$*–spazio vettoriale e sia* W *un sottospazio di* V*, allora*

i) $\dim(W) \leq \dim(V)$,

ii) se $\dim(W) = \dim(V)$ *allora* $W = V$*.*

Dimostrazione. i) Sia $\dim(V) = n$ e sia $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V; in particolare $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un sistema di generatori di V. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ una base di W. Allora $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$ sono vettori di W linearmente indipendenti. Poichè $W \subseteq V$, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m$

sono vettori di V linearmente indipendenti. Dal Lemma 2.21 si ha $m \leq n$. Quindi $\dim(W) \leq \dim(V)$.

ii) Se $\dim(W) = \dim(V) = n$, sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base di W. Poichè $W \subseteq V$, $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ sono vettori di V linearmente indipendenti. Dal Teorema 2.27, 1), $\mathcal{B}$ è una base di V. Allora $W = \langle \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n \rangle = V$, come volevasi. □

Teorema 2.30. *(Formula dimensionale di Grassmann)*
Siano U e W sottospazi dello spazio vettoriale V. Allora

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(U \cap W) + \dim(U + W).$$

In particolare, $U + W$ è somma diretta di U e W se e solo se $\dim(U) + \dim(W) = \dim(U + W)$.

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_q\}$ una base di $U \cap W$. Dal teorema del completamento ad una base esistono $\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t \in U$ e $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s \in W$ tali che $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_q, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t\}$ è una base di U e $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_q, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ è una base di W. Poichè $\dim(U)+\dim(W)-\dim(U\cap W) = q+t+q+s-q = q+t+s$, per dimostrare la prima parte del teorema è sufficiente mostrare che $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_q, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ è una base di $U + W$.

Dimostriamo che sono generatori di $U+W$. Sia $\mathbf{u}+\mathbf{w} \in U+W$, dove $\mathbf{u} \in U$ e $\mathbf{w} \in W$. Esistono allora $a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_t, a'_1, \ldots, a'_q, c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{u} = a_1\mathbf{z}_1 + \ldots + a_q\mathbf{z}_q + b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_t\mathbf{u}_t$ e $\mathbf{w} = a'_1\mathbf{z}_1 + \ldots + a'_q\mathbf{z}_q + c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_s\mathbf{w}_s$. Dunque

$$\mathbf{u} + \mathbf{w} = (a_1 + a'_1)\mathbf{z}_1 + \ldots + (a_q + a'_q)\mathbf{z}_q + b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_t\mathbf{u}_t + c_1\mathbf{w}_1 \ldots + c_s\mathbf{w}_s,$$

come volevasi.

Dimostriamo che sono linearmente indipendenti. Siano $a_1, \ldots, a_q, b_1, \ldots, b_t, c_1, \ldots, c_s \in \mathbb{K}$ tali che $a_1\mathbf{z}_1 + \ldots + a_q\mathbf{z}_q + b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_t\mathbf{u}_t + c_1\mathbf{w}_1 \ldots + c_s\mathbf{w}_s = \mathbf{0}$. Allora

$$c_1\mathbf{w}_1 \ldots + c_s\mathbf{w}_s = -(a_1\mathbf{z}_1 + \ldots + a_q\mathbf{z}_q + b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_t\mathbf{u}_t), \tag{2.1}$$

dove $c_1\mathbf{w}_1 \ldots + c_s\mathbf{w}_s \in W$, mentre $a_1\mathbf{z}_1 + \ldots + a_q\mathbf{z}_q + b_1\mathbf{u}_1 + \ldots + b_t\mathbf{u}_t \in U$. Pertanto $a_1\mathbf{z}_1+\ldots+a_q\mathbf{z}_q+b_1\mathbf{u}_1+\ldots+b_t\mathbf{u}_t \in U\cap W$. Poichè $\{\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_q\}$ è una base di $U\cap W$, esistono $d_1, \ldots, d_q \in \mathbb{K}$ tali che $a_1\mathbf{z}_1+\ldots+a_q\mathbf{z}_q+b_1\mathbf{u}_1+\ldots+b_t\mathbf{u}_t = d_1\mathbf{z}_1+\ldots+d_q\mathbf{z}_q$. Si ha pertanto $(a_1-d_1)\mathbf{z}_1+\ldots+(a_q-d_q)\mathbf{z}_q+b_1\mathbf{u}_1+\ldots+b_t\mathbf{u}_t = \mathbf{0}$, ma $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_q, \mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_t$ sono linearmente indipendenti e quindi tutti i coefficienti sono nulli, in particolare $b_1 = b_2 = \ldots = b_t = 0$. Da (2.1), si ha $a_1\mathbf{z}_1 + \ldots + a_q\mathbf{z}_q + c_1\mathbf{w}_1 + \ldots + c_s\mathbf{w}_s = \mathbf{0}$, ma $\mathbf{z}_1, \ldots, \mathbf{z}_q, \mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s$ sono linearmente indipendenti e quindi tutti i coefficienti $a_1, \ldots, a_q, c_1, \ldots, c_s$ sono nulli, come volevasi.

L'ultima parte del teorema segue dal fatto che la somma è diretta. □

Esercizi 2.31. 1. Si considerino i sottospazi vettoriali U, W di $\mathbb{R}^3$, dove $U = \langle (1, 2, -1), (0, 1, 0) \rangle$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + z = 0\}$. Determinare $U \cap W$, $U + W$ e le dimensioni $\dim(U), \dim(W), \dim(U \cap W), \dim(U + W)$.

Sia $\mathbf{v} \in U$, allora esistono $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{v} = (\alpha, 2\alpha + \beta, -\alpha)$. Inoltre $\mathbf{v} \in W$, infatti $\alpha - \alpha = 0$. Quindi $U \subseteq W$. Si noti che $W = \langle (1, 0, -1), (0, 1, 0) \rangle$ e che sia i generatori di U che i generatori di W sono linearmente indipendenti, quindi $\dim(U) = \dim(W) = 2$. Pertanto $U = W = U \cap W = U + W$ e $\dim(U \cap W) = \dim(U + W) = 2$.

2. Si considerino i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 1)$ e $\mathbf{v}_2 = (1, 0, 3)$ di $\mathbb{R}^3$.

   - Mostrare che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti.
     $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ non sono proporzionali.
   - Completare $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$ ad una base di $\mathbb{R}^3$ in tre modi distinti.
     $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, (1, 0, 0)\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, (0, 1, 0)\}$, $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, (0, 0, 1)\}$.
   - Per ciascuno dei sottospazi $\langle \mathbf{v}_1 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_2 \rangle$, $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, determinare un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ tale che il sottospazio somma sia $\mathbb{R}^3$ e che sia somma diretta con esso.
     $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{v}_1 \rangle \oplus \langle \mathbf{v}_2, (1, 0, 0) \rangle$, $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{v}_2 \rangle \oplus \langle \mathbf{v}_1, (1, 0, 0) \rangle$, $\mathbb{R}^3 = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle \oplus \langle (1, 0, 0) \rangle$.

Esercizi 2.32.

1. Si consideri l'insieme $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid (1-k)x^2 + y + 2z - 3t = k^2 - 1\}$, dove $k \in \mathbb{R}$.

   - Stabilire per quali valori del parametro reale k l'insieme S è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$.
   - Nel caso in cui S è un sottospazio vettoriale, determinare una base $\mathcal{B}$ e la dimensione di S ed estendere la base $\mathcal{B}$ di S ad una base di $\mathbb{R}^4$.

2. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^4$:

   $$\mathbf{u} = (1, 3, 0, 3), \mathbf{v} = (-1, -2, 1, -1), \mathbf{w} = (0, k - 1, k^2 - 1, 3k - 2),$$

   dove $k \in \mathbb{R}$.

   - Determinare il valore di $k \in \mathbb{R}$ tale che $\dim(\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle) = 2$.
   - Per il valore di k trovato in precedenza, esprimere uno dei tre vettori come combinazione lineare dei rimanenti.

3. Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale. Dimostrare che se i vettori $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ sono linearmente indipendenti, allora anche $\mathbf{u}+\mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{v}+\mathbf{w}, \mathbf{w}$ sono linearmente indipendenti.

4. Si considerino, al variare di $k \in \mathbb{R}$, i seguenti sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^3$:

   $$S_k = \langle (k, 0, k), (1, k, 1), (1, 1, k) \rangle.$$

   Determinare la loro intersezione

   $$\bigcap_{k \in \mathbb{R}} S_k.$$

5. Siano $f_1, f_2, f_3, f_4 \in \mathbb{R}_3[X]$, dove $f_1(X) = 2X$, $f_2(X) = X^2+X+1$, $f_3(X) = -3X+2$, $f_4(X) = 1$. Calcolare la dimensione del sottospazio vettoriale $W = \langle f_1, f_2, f_3, f_4 \rangle$.

6. Considerati i vettori $\mathbf{v}_1 = (1, -1, 0, 0, 0), \mathbf{v}_2 = (0, 2, 0, -1, 1), \mathbf{v}_3 = (0, 0, 0, 0, 2i) \in \mathbb{C}^5$, costruire una base di $\mathbb{C}^5$ contenente i vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$.

7. Siano $\mathbf{v}_1 = (a, b), \mathbf{v}_2 = (c, d) \in \mathbb{R}^2$. Dimostrare $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti se e solo se $ad - bc = 0$.

8. Sia V un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale tale che $\dim V = 3$ e sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ una base di V. Siano $U = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2 \rangle$, $W = \langle \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_3 \rangle$. Mostrare che $V = U + W$ e che la somma $U + W$ non è diretta.

3 Spazi vettoriali euclidei

Gli spazi vettoriali considerati in questo capitolo sono definiti sul campo $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ dei numeri reali.

3.1 Prodotti scalari

Sia V un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale. Si definisce *prodotto scalare* un'applicazione

$$\cdot : (\mathbf{u}, \mathbf{v}) \in V \times V \longmapsto \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}$$

tale che le seguenti proprietà sono soddisfatte:

i) Bilinearità: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{u}', \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, si ha che

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} + \mathbf{u}') \cdot \mathbf{v} &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}, \\ \mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{v}') &= \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} + \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}, \\ (\lambda \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} = \mathbf{u} \cdot (\lambda \mathbf{v}) &= \lambda(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}). \end{aligned}$$

ii) Simmetria: $\forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}$.

iii) Definita positiva: $\forall \mathbf{u} \in V$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} \geq 0$, $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 0$ se e solo se $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.

Un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale dotato di un prodotto scalare si dice *spazio vettoriale euclideo reale*.

Esempi 3.1.

1. L'esempio fondamentale di spazio vettoriale euclideo è $\mathbb{R}^n$ con il *prodotto interno standard*, o *prodotto euclideo*, $\cdot : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ che ad ogni coppia $\mathbf{v}_1 = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{v}_2 = (y_1, \dots, y_n)$ di vettori di $\mathbb{R}^n$ associa il numero reale

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

Si noti che se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ si considerano come vettori riga ($\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{M}_{1,n}(\mathbb{R})$), allora

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2^t.$$

2. Se $V = \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ è lo spazio vettoriale della matrici di ordine $m \times n$ definite sul campo dei numeri reali, allora l'applicazione $\cdot$ che associa alle matrici $A, B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ il numero reale

$$A \cdot B = Tr(AB^t)$$

è un prodotto scalare.

3. Sia $V = \mathbb{R}^4$. Allora l'applicazione che associa alla coppia di vettori $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3, x_4), \mathbf{v} = (y_1, y_2, y_3, y_4) \in \mathbb{R}^4$, il numero reale

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 3x_3y_3 + 4x_4y_4$$

è un prodotto scalare.

Nei vari casi, la verifica delle proprietà dell'applicazione "$\cdot$" di essere bilineare, simmetrica e definita positiva è lasciata come esercizio.

Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale. Due vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ si definiscono *ortogonali* se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$ e si denota con $\mathbf{v} \perp \mathbf{u}$. Più in generale due sottospazi U, W di V si definiscono *ortogonali* se $\forall\, \mathbf{u} \in U$, $\forall\, \mathbf{w} \in W$, si ha che $\mathbf{u} \cdot \mathbf{w} = 0$.

Osservazione 3.2. Il vettore nullo è ortogonale a tutti i vettori di V. Infatti $\mathbf{v} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{v} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{u}) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.

Si definisce *modulo* (o *norma* o *lunghezza*) di un vettore $\mathbf{v} \in V$ e si denota con $||\mathbf{v}||$, la radice quadrata del prodotto scalare $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$:

$$||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}.$$

Un vettore $\mathbf{v} \in V$ avente norma 1 ($||\mathbf{v}|| = 1$) si definisce *versore*.

Teorema 3.3. *L'applicazione* $||\ ||: \mathbf{v} \in V \longmapsto ||\mathbf{v}|| \in \mathbb{R}$ *soddisfa le seguenti proprietà:* $\forall \mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$,

i) $||\mathbf{v}|| \geq 0$, $||\mathbf{v}|| = 0$ *se e solo se* $\mathbf{v} = \mathbf{0}$*;*

ii) $||\lambda \mathbf{v}|| = |\lambda|\ ||\mathbf{v}||$*;*

iii) $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{2}(||\mathbf{v} + \mathbf{u}||^2 - ||\mathbf{v}||^2 - ||\mathbf{u}||^2)$ *(Formula di Polarizzazione);*

iv) $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| \leq ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}||$ *(Disuguaglianza di Schwarz), inoltre* $|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| = ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}||$ *se e solo se* $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$*, per qualche* $\lambda \in \mathbb{R}$*;*

v) $||\mathbf{v} + \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{u}||$ *(Disuguaglianza triangolare).*

Dimostrazione. i) Essendo $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \geq 0$, si ha che $||\mathbf{v}|| = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} \geq 0$. Inoltre $||\mathbf{v}|| = 0$ se e solo se $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = 0$ se e solo se $\mathbf{v} = \mathbf{0}$.

ii) Essendo $||\lambda \mathbf{v}||^2 = (\lambda \mathbf{v}) \cdot (\lambda \mathbf{v}) = \lambda^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$, si ha che

$$||\lambda \mathbf{v}|| = \sqrt{\lambda^2 \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = |\lambda| \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}} = |\lambda|\ ||\mathbf{v}||.$$

iii)

$$||\mathbf{v} + \mathbf{u}||^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) = ||\mathbf{v}||^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + ||\mathbf{u}||^2.$$

iv) Se entrambi i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ sono nulli, la disuguaglianza è vera. Assumiamo allora che $\mathbf{u}$ è non nullo. Allora

$$
\begin{aligned}
0 \leq \left|\left|\mathbf{v} - \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}\right|\right|^2 &= ||\mathbf{v}||^2 + \left|\left|\left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}\right|\right|^2 - 2\mathbf{v} \cdot \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u} \\
&= ||\mathbf{v}||^2 + \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right)^2 ||\mathbf{u}||^2 - 2\frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = ||\mathbf{v}||^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}} = ||\mathbf{v}||^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{||\mathbf{u}||^2}.
\end{aligned}
$$

Pertanto $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 \leq ||\mathbf{u}||^2||\mathbf{v}||^2$ e $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| \leq ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||$.

Inoltre, se $\mathbf{u} = \lambda \mathbf{v}$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, allora

$$
|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = |\lambda \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| = |\lambda|\ |\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}| = |\lambda| \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = |\lambda|\ ||\mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||.
$$

Viceversa, se $|\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}| = ||\mathbf{u}||\ ||\mathbf{v}||$, allora $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2 = ||\mathbf{u}||^2\ ||\mathbf{v}||^2$ e quindi

$$
0 = ||\mathbf{v}||^2 - \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})^2}{||\mathbf{u}||^2} = \left|\left|\mathbf{v} - \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}\right|\right|^2.
$$

Allora $\mathbf{v} - \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u} = \mathbf{0}$ e pertanto

$$
\mathbf{v} = \left(\frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}}{\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}\right) \mathbf{u}.
$$

v) Dalla Disuguaglianza di Schwarz si ha che

$$
\begin{aligned}
||\mathbf{v} + \mathbf{u}||^2 = (\mathbf{v} + \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{u}) &= ||\mathbf{v}||^2 + 2\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} + ||\mathbf{u}||^2 \leq ||\mathbf{v}||^2 + 2|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}| + ||\mathbf{u}||^2 \\
&\leq ||\mathbf{v}||^2 + 2||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{u}||^2 = (||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{u}||)^2.
\end{aligned}
$$

Pertanto

$$
||\mathbf{v} + \mathbf{u}|| \leq ||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{u}||.
$$

□

Se $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ sono vettori non nulli, dalla Disuguaglianza di Schwarz, si ha che

$$
\frac{|\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}|}{||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}||} \leq 1
$$

e pertanto

$$
-1 \leq \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}||} \leq 1. \tag{3.1}
$$

Tenendo conto di (3.1) e delle proprietà della funzione coseno, esiste, un unico numero reale $\theta \in [0, \pi]$ tale che

$$
\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}||} \leq 1, \text{ i.e., } \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = ||\mathbf{v}||\ ||\mathbf{u}|| \cos\theta.
$$

Il numero reale θ si dice *angolo (convesso)* tra i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$.

Proposizione 3.4. *i) L'angolo θ tra due vettori non nulli $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ è $\pi/2$ se e solo se $\mathbf{v}$ e $\mathbf{u}$ sono ortogonali, i.e., $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0$.*

ii) L'angolo θ tra due vettori non nulli $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ è 0 oppure π se e solo se $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. *i)* Poichè $||\mathbf{v}|| > 0$ e $||\mathbf{u}|| > 0$, allora $\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = ||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{u}|| \cos\theta = 0$ se e solo se $\cos\theta = 0$ se e solo se $\theta = \pi/2$.

ii) I vettori $\mathbf{v}, \mathbf{u} \in V$ sono proporzionali se e solo se $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u}$, per qualche $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}}{||\mathbf{v}|| \, ||\mathbf{u}||} = \frac{\lambda\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}}{|\lambda| \, ||\mathbf{u}||^2} = \frac{\lambda}{|\lambda|} = \begin{cases} 1 & \text{se } \theta = 0 \\ -1 & \text{se } \theta = \pi \end{cases}$$

□

Proposizione 3.5. *Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sono vettori non nulli a due a due ortogonali, allora sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Siano $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, tali che $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Allora

$$0 = \mathbf{v}_j \cdot \mathbf{0} = \mathbf{v}_j \cdot (\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_n) = \lambda_1\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_n\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_n = \lambda_j\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j.$$

Poichè $\mathbf{v}_j \cdot \mathbf{v}_j > 0$, si ha che $\lambda_j = 0$, $1 \leq j \leq n$. □

Sia A un sottoinsieme di V. Si consideri l'insieme dei vettori di V che sono ortogonali a tutti i vettori di A:

$$A^\perp = \{\mathbf{v} \in V \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} = 0, \forall\mathbf{u} \in A\}.$$

Lemma 3.6. *$A^\perp$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. $\forall\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in A^\perp$, $\forall\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, si ha che $\forall\mathbf{u} \in A$,

$$(\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{u} = \lambda_1\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{u} + \lambda_2\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{u} = \lambda_1 0 + \lambda_2 0 = 0.$$

Pertanto $\lambda_1\mathbf{v}_1 + \lambda_2\mathbf{v}_2 \in A^\perp$. □

Proposizione 3.7. *Sia $A = \langle\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_m\rangle$. Allora $\mathbf{v} \in A^\perp$ se e solo se $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_i$, $1 \leq i \leq m$.*

Dimostrazione. Se $\mathbf{v} \in A^\perp$, allora $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}$, $\forall\,\mathbf{w} \in A$ e quindi $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_i$, $1 \leq i \leq m$, in quanto $\mathbf{v}_i \in A$, $1 \leq i \leq m$.

Viceversa se $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_i$, $1 \leq i \leq m$, allora $\forall\,\mathbf{w} \in A$, $\exists\,\alpha_1, \ldots \alpha_m \in \mathbb{R}$, tali che $\mathbf{w} = \alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m$. Ne discende che

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = \mathbf{v} \cdot (\alpha_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v}_m) = \alpha_1\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_m = 0$$

e quindi $\mathbf{v} \in A^\perp$. □

$A^\perp$ si definisce *complemento ortogonale* di A.

Esercizi 3.8. Nei seguenti esercizi si consideri $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto interno standard.

1. In $\mathbb{R}^3$, si determini $h \in \mathbb{R}$ tale che i vettori $\mathbf{v} = (1, h, 3)$ e $\mathbf{w} = (h, 2, -4)$ sono ortogonali.
$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = (1, h, 3) \cdot (h, 2, -4) = 3h - 12 = 0.$$
Quindi $\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = 0$ se e solo se $h = 4$.

2. In $\mathbb{R}^4$ si determini una base di W e di $W^\perp$, dove
$$W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + z = x - t = t + z = 0\}.$$
Si noti che $W = \{(-z, y, z, -z) \mid y, z \in \mathbb{R}\} = \langle \mathbf{w}_1 = (1, 0, -1, 1), \mathbf{w}_2 = (0, 1, 0, 0)\rangle$. Allora $\mathbf{v} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in W^\perp$ se e solo se $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}_1$ e $\mathbf{v} \perp \mathbf{w}_2$. Pertanto
$$\begin{aligned} 0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (1, 0, -1, 1) &= x_1 - x_3 + x_4 \\ 0 = (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot (0, 1, 0, 0) &= x_2 \end{aligned}$$
e $\mathbf{v} = (x_1, 0, x_1 + x_4, x_4)$. Quindi $W^\perp = \{(a, 0, a+b, b) \mid a, b \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 1, 0), (0, 0, 1, 1)\rangle$.

3. Siano $\mathbf{v}_1 = (1, 0, 1, 0), \mathbf{v}_2 = (3, 1, -1, h) \in \mathbb{R}^4$.
   - Determinare, se esiste, $h \in \mathbb{R}$ tale che l'angolo θ tra i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ risulta 60°.
     Poichè $\cos(\theta) = \frac{\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2}{||\mathbf{v}_1|| \, ||\mathbf{v}_2||}$, dove $||\mathbf{v}_1|| = \sqrt{2}$, $||\mathbf{v}_2|| = \sqrt{11 + h^2}$ e $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 2$. Quindi se $\theta = 60°$, allora $\cos(\theta) = \frac{1}{2}$ e $\sqrt{2(11 + h^2)} = 4$, da cui si ottiene $h^2 = -3$ e quindi $h \notin \mathbb{R}$.
   - Determinare, se esiste, $h \in \mathbb{R}$ tale che l'angolo θ tra i vettori $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$ risulta 90°.
     Tale valore di h non esiste, poichè $\theta = 90°$ se e solo se $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 0$, ma $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = 2$.

4. In $\mathbb{R}^3$ si determini $W^\perp$ ed $S = \{\mathbf{u} \in W^\perp \mid ||\mathbf{u}|| = 1\}$, dove
$$W = \langle (0, 1, 0), (1, 3, -2)\rangle.$$
Sia $\mathbf{u} = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$. Allora $\mathbf{u} \in W^\perp$ se e solo se $\mathbf{u} \perp (0, 1, 0)$ e $\mathbf{u} \perp (1, 3, -2)$.
$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot (0, 1, 0) &= x_2 = 0 \\ \mathbf{u} \cdot (1, 3, -1) &= x_1 + 3x_2 - x_3 = 0. \end{aligned}$$
Quindi $\mathbf{u} = (2x_3, 0, x_3)$ e $W^\perp = \{(2a, 0, a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 0, 1)\rangle$. Inoltre se $\mathbf{u} \in W^\perp$, allora $||\mathbf{u}|| = \sqrt{4a^2 + a^2} = \sqrt{5}|a^2|$ e $||\mathbf{u}|| = 1$ se e solo se $a = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$. Pertanto $S = \left\{ \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\}$.

3.2 Basi ortonormali

Sia V uno spazio vettoriale euclideo reale tale che $\dim(V) = n$ e sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base di V.

$\mathcal{B}$ si definisce *ortogonale* se $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = 0$, per ogni $i \neq j$.

$\mathcal{B}$ si dice *ortonormale* se è ortogonale e $||\mathbf{e}_i|| = 1$, $1 \leq i \leq n$. Equivalentemente $\mathcal{B}$ è ortonormale se

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{i,j} := \begin{cases} 1 \text{ if } i = j \\ 0 \text{ if } i \neq j \end{cases}$$

La funzione $\delta_{i,j}$ si chiama *delta di Kronecker*. Una base ortonormale è formata da versori.

Osservazione 3.9. Si noti che se $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di V, allora $\forall\, \mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n, \mathbf{w} = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n \in V$, si ha che

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{w} = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n.$$

Quindi il prodotto scalare di due vettori è il prodotto interno standard dei vettori di $\mathbb{R}^n$ delle loro componenti rispetto a $\mathcal{B}$.

Sia W un sottospazio di V tale che $\dim(W) = r$ e sia $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ una base ortogonale di W. Se $\mathbf{v} \in V$, si definisce *proiezione ortogonale di* $\mathbf{v}$ *su* W il vettore:

$$\mathbf{v}_W = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 + \ldots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_r}{\mathbf{w}_r \cdot \mathbf{w}_r}\mathbf{w}_r.$$

Teorema 3.10. *Sia W un sottospazio di V tale che $\dim(W) = r$ e sia $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_r\}$ una base ortogonale di W. Allora vale quanto segue:*

i) $\mathbf{v}_W \in W$.

ii) $\mathbf{v} - \mathbf{v}_W \in W^\perp$.

iii) $\forall\, \mathbf{w} \in W$, $||\mathbf{v} - \mathbf{v}_W|| \leq ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$.

Dimostrazione. *i)* Per definizione $\mathbf{v}_W$ è combinazione lineare dei vettori di una base di W. Allora $\mathbf{v}_W \in W$.

ii) Sia $\mathbf{w} \in W$, allora esistono $\lambda_1, \ldots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{w}_r$. Quindi

$$\begin{aligned}
(\mathbf{v} - \mathbf{v}_W) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_W) &\cdot (\lambda_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{w}_r) = \\
&= \mathbf{v} \cdot (\lambda_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{w}_r) - \mathbf{v}_W \cdot (\lambda_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{w}_r) = \\
&= \lambda_1\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_r - \left(\frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1}{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{w}_1}\mathbf{w}_1 + \ldots + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_r}{\mathbf{w}_r \cdot \mathbf{w}_r}\mathbf{w}_r\right) \cdot (\lambda_1\mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{w}_r) = \\
&= \lambda_1\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 + \ldots + \lambda_r\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_r - \lambda_1\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_1 - \ldots - \lambda_r\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}_r = 0.
\end{aligned}$$

iii) Sia $\mathbf{w} \in W$. Poichè $\mathbf{v} - \mathbf{v}_W \in W^\perp$ e $\mathbf{v}_W \in W$, si ha che $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_W) \cdot \mathbf{w} = 0$ e $(\mathbf{v} - \mathbf{v}_W) \cdot \mathbf{v}_W = 0$. Allora

$$(\mathbf{v} - \mathbf{v}_W) \cdot (\mathbf{v}_W - \mathbf{w}) = (\mathbf{v} - \mathbf{v}_W) \cdot \mathbf{v}_W - (\mathbf{v} - \mathbf{v}_W) \cdot \mathbf{w} = 0 - 0 = 0.$$

Dal Teorema 3.3, *iii)* si ha che

$$||\mathbf{v}-\mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v}-\mathbf{v}_W+\mathbf{v}_W-\mathbf{w}||^2 = ||\mathbf{v}-\mathbf{v}_W||^2+||\mathbf{v}_W-\mathbf{w}||^2 \geq ||\mathbf{v}-\mathbf{v}_W||^2$$

e quindi $||\mathbf{v}-\mathbf{w}|| \geq ||\mathbf{v}-\mathbf{v}_W||$. □

Teorema 3.11. *(Teorema di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt) Sia V uno spazio vettoriale euclideo e siano $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m$ vettori di V. Allora esistono $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m$ vettori di V tali che*

i) $\langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\rangle = \langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\rangle$,

ii) $\mathbf{w}_i\cdot\mathbf{w}_j = 0$, $i\neq j$, *i.e., i vettori* $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m$ *sono a due a due ortogonali tra loro.*

Dimostrazione. Per induzione su m. Base d'induzione. Per $m=1$, consideriamo $\mathbf{w}_1=\mathbf{v}_1$. Allora risultano verificate i) e ii).

Ipotesi d'induzione: le tesi i), ii) sono vere per m.

Tesi d'induzione. Sia

$$\mathbf{w}_{m+1} = \mathbf{v}_{m+1} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbf{w}_j\cdot\mathbf{v}_{m+1}}{\mathbf{w}_j\cdot\mathbf{w}_j}\mathbf{w}_j.$$

Dalla definizione segue che $\mathbf{v}_{m+1}$ è combinazione lineare di $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_{m+1}$ e per ipotesi d'induzione $\langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\rangle = \langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m\rangle$, quindi $\langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_{m+1}\rangle \subseteq \langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m,\mathbf{w}_{m+1}\rangle$. D'altro canto, tenendo conto della definizione di $\mathbf{w}_{m+1}$, se ne deduce che $\mathbf{w}_{m+1}$ è combinazione lineare di $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_m,\mathbf{v}_{m+1}$. Per ipotesi d'induzione i vettori $\mathbf{w}_1,\mathbf{w}_2,\dots,\mathbf{w}_m \in \langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m\rangle$, quindi $\langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_m,\mathbf{w}_{m+1}\rangle \subseteq \langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_m,\mathbf{v}_{m+1}\rangle$ e la proprietà i) è verificata.

Inoltre, fissato i, con $1\leq i\leq m$, si ha che

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{m+1}\cdot\mathbf{w}_i &= \left(\mathbf{v}_{m+1} - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbf{w}_j\cdot\mathbf{v}_{m+1}}{\mathbf{w}_j\cdot\mathbf{w}_j}\mathbf{w}_j\right)\cdot\mathbf{w}_i = \\ &= (\mathbf{v}_{m+1}\cdot\mathbf{w}_i) - \sum_{j=1}^{m} \frac{\mathbf{w}_j\cdot\mathbf{v}_{m+1}}{\mathbf{w}_j\cdot\mathbf{w}_j}(\mathbf{w}_j\cdot\mathbf{w}_i) = \mathbf{v}_{m+1}\cdot\mathbf{w}_i - \mathbf{w}_i\cdot\mathbf{v}_{m+1} = 0,\end{aligned}$$

in quanto per ipotesi d'induzione $\mathbf{w}_i\cdot\mathbf{w}_j=0$, per $i\neq j$, $1\leq i,j\leq m$. Quindi anche la proprietà ii) è verificata. □

Corollario 3.12. *Ogni spazio vettoriale euclideo possiede una base ortonormale.*

Dimostrazione. Se $\dim(V)=n$ e $\{\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\}$ è una base di V, allora dal Teorema di ortogonalizzazione di Gram–Schmidt (Teorema 3.11), esistono $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\in V$ a due a due ortogonali tra loro e tali che $V=\langle \mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n\rangle = \langle \mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n\rangle$. Si noti che nessuno dei vettori $\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_n$ è il vettore nullo, altrimenti se $\mathbf{w}_i=\mathbf{0}$ per qualche i, allora $\{\mathbf{w}_1,\dots,\mathbf{w}_{i-1},\mathbf{w}_{i+1},\dots,\mathbf{w}_n\}$ è un sistema di generatori di V costituito da $n-1$ vettori e $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è un insieme di n vettori di V linearmente indipedenti. Dal Lemma 2.21 si avrebbe $n < n-1$, contraddizione. Allora dalla Proposizione 3.5, i vettori $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ risultano linearmente indipendenti e quindi formano una base ortogonale di V. Ne segue che

$$\left\{\frac{\mathbf{w}_1}{||\mathbf{w}_1||}, \ldots, \frac{\mathbf{w}_m}{||\mathbf{w}_m||}\right\}$$

è una base ortonormale di V. □

Proposizione 3.13. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia W un sottospazio vettoriale di V. Allora $V = W \oplus W^\perp$ e quindi* $\dim(V) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$.

Dimostrazione. Mostriamo che $V = W + W^\perp$. Si noti che W è esso stesso uno spazio vettoriale euclideo e quindi dal Corollario 3.12, W possiede una base ortonormale, $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m\}$, dove $m = \dim(W)$. Sia $\mathbf{v} \in V$ e poniamo

$$\mathbf{w} = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_m)\mathbf{e}_m \text{ e } \mathbf{w}' = \mathbf{v} - \mathbf{w}.$$

Allora $\mathbf{v} = \mathbf{w} + \mathbf{w}'$ e $\mathbf{w} \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle = W$. Inoltre, fissato i, con $1 \leq i \leq m$, si ha che $\mathbf{w}' \cdot \mathbf{e}_i = 0$, infatti

$$\begin{aligned}
\mathbf{w}' \cdot \mathbf{e}_i &= (\mathbf{v} - \mathbf{w}) \cdot \mathbf{e}_i = \\
&= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{e}_i) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) - (((\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_m)\mathbf{e}_m) \cdot \mathbf{e}_i) = \\
&= (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i)(\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_i) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_i) = 0.
\end{aligned}$$

Quindi $\mathbf{w}' \perp \mathbf{e}_i$, per ogni $1 \leq i \leq m$. Allora $\mathbf{w}'$ è ortogonale ad ogni combinazione lineare dei vettori $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$, i.e., $\mathbf{w}' \in \langle \mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m \rangle^\perp = W^\perp$.

Mostriamo infine che $V = W \oplus W^\perp$. Sia $\mathbf{w} \in W \cap W^\perp$. Poichè $\mathbf{w} \in W^\perp$, si ha che $\mathbf{w}$ è ortogonale a tutti i vettori di W, ma $\mathbf{w} \in W$ e quindi $\mathbf{w} \perp \mathbf{w}$, i.e., $\mathbf{w} \cdot \mathbf{w} = 0$ e quindi $\mathbf{w} = \mathbf{0}$. □

Proposizione 3.14. *Sia V uno spazio vettoriale euclideo e sia W un sottospazio vettoriale di V. Allora $W^{\perp\perp} = W$.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{w} \in W$, allora $\forall \mathbf{u} \in W^\perp$ si ha che $\mathbf{w} \cdot \mathbf{u} = 0$. Quindi $\mathbf{w} \in W^{\perp\perp}$ e $W \subseteq W^{\perp\perp}$. Se $\dim(V) = n$ e $\dim(W) = r$, allora $\dim(W^\perp) = n - r$ e $\dim(W^{\perp\perp}) = n - (n - r) = r$. Quindi $W = W^{\perp\perp}$, poichè $W \subseteq W^\perp$ e $\dim(W) = \dim(W^{\perp\perp})$. □

Esercizi 3.15. Nei seguenti esercizi si consideri $\mathbb{R}^n$ dotato del prodotto interno standard.

1. In $\mathbb{R}^3$ si determinino i vettori ortogonali a $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ e tra questi, quelli di norma 1.

   Sia $\mathbf{w} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{w} \in \mathbf{v}^\perp$ se e solo se $x + y + z = 0$. Pertanto

   $$\mathbf{v}^\perp = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ \mid \ x + y + z = 0\}.$$

Sia $\mathbf{w}$ un vettore di $\mathbf{v}^\perp$. Allora esistono $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $\mathbf{w} = (x, y, -x-y)$ e $||\mathbf{w}|| = \sqrt{x^2 + y^2 + (x+y)^2} = \sqrt{2(x^2+y^2)}$. Pertanto i vettori ortogonali a $\mathbf{v}$ di norma 1 formano il seguente insieme

$$\left\{(x, y, -x-y) \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \sqrt{x^2+y^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\right\}.$$

2. In $\mathbb{R}^3$ si determini $W^\perp, \dim(W^\perp)$ ed una sua base, dove $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - y = 3x = z - x\}$.

   Si noti che $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x + y = 4x - z = 0\} = \{(\alpha, -2\alpha, 4\alpha) \mid \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle(1, -2, 4)\rangle$. Sia $\mathbf{v} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, allora $\mathbf{v} \in W^\perp$ se e solo se $x - 2y + 4z = 0$. Pertanto

   $$W^\perp = \{(2\lambda - 4\mu, \lambda, \mu) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\} = \langle(2, 1, 0), (-4, 0, 1)\rangle.$$

   Quindi $\dim(W^\perp) = 2$ ed una sua base è $\{(2, 1, 0), (-4, 0, 1)\}$.

3. Si considerino i sottospazi vettoriali U, W di $\mathbb{R}^3$, dove $U = \langle(-1, 2, -2)\rangle$ e $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y - 2z = x - z = 0\}$. Determinare due sottospazi vettoriali Z, T di $\mathbb{R}^3$ tali che $\mathbb{R}^3 = U \oplus Z$ e $\mathbb{R}^3 = W \oplus T$.

   È possibile scegliere $Z = U^\perp$ e $T = W^\perp$. Quindi $Z = \langle(2, 1, 0), (0, 1, 1)\rangle$ e $T = \langle(1, -1, 0), (1, 0, -1)\rangle$, in quanto $W = \langle(1, 1, 1)\rangle$.

4 Matrici

4.1 Determinante di una matrice quadrata

Una *sottomatrice* $p \times q$ di una matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ è una matrice costituita dagli elementi di A comuni a p righe e q colonne fissate di A.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e sia $A_{i,j}$ la sottomatrice che si ottiene da A cancellando la i–esima riga e la j–esima colonna.

Diamo ora una definizione ricorsiva del determinante di una matrice quadrata di ordine n. Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si definisce *determinante di* A la funzione:

$$\det : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto \det(A) \in \mathbb{K},$$

dove

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}).$$

Pertanto

se $n = 1$,

$$A = (a_{11}) \text{ e } \det(A) = a_{11};$$

se $n = 2$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \text{ e } \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21};$$

se $n = 3$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \text{ e per la regola di Sarrus si ha che}$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}.$$

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *singolare* se $\det(A) = 0$. L'elemento $\det(A) \in \mathbb{K}$ verrà anche indicato con $|A|$.

Si definisce *minore complementare* o *minore* dell'elemento a_{ij} il determinante della sottomatrice A_{ij} che si ottiene da A cancellando la i–esima riga e la j–esima colonna.

Si definisce *complemento algebrico* dell'elemento a_{ij} il minore complementare dell'elemento a_{ij}, con il proprio segno se $i + j$ è pari, con il segno opposto se $i + j$ è dispari. Quindi il complemento algebrico dell'elemento $a_{i,j}$ risulta essere

$$(-1)^{i+j} \det(A_{ij}).$$

Osservazione 4.1. La definizione fornita di determinante si può enunciare come segue: *Il determinante di una matrice quadrata è la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga o di una sua colonna per i rispettivi complementi algebrici.* [2]

Teorema 4.2. *(Secondo Teorema di Laplace)*
Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, allora la somma dei prodotti degli elementi di una sua riga o di una sua colonna per i complementi algebrici corrispondenti ad un'altra riga o colonna è pari a zero:

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{k+j}a_{ij}\det(A_{kj}) = 0,\ i \neq k,\quad \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+k}a_{ij}\det(A_{ik}) = 0,\ j \neq k.$$

Esempi 4.3. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Allora

$$\sum_{j=1}^{3}(-1)^{2+j}a_{1j}\det(A_{2j}) = -a_{11}\det(A_{21}) + a_{12}\det(A_{22}) - a_{13}\det(A_{23}) =$$

$$= -1\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 6 + 4 = 0.$$

$$\sum_{i=1}^{3}(-1)^{i+2}a_{i1}\det(A_{i2}) = -a_{11}\det(A_{12}) + a_{21}\det(A_{22}) - a_{31}\det(A_{32}) =$$

$$= -1\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1 - 9 + 10 = 0.$$

Proposizione 4.4. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, allora valgono le seguenti proprietà:*

i) *Il determinante di A è uguale a quello della sua trasposta* $\det(A) = \det(A^t)$,

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = -2.$$

ii) *Il determinante di una matrice triangolare (inferiore o superiore) è il prodotto degli elementi della sua diagonale principale.*

iii) $\det(I_n) = 1$.

iv) *Se una riga o una colonna di A è nulla, allora* $\det(A) = 0$.

[2] Si noti che la definizione di determinante di una matrice quadrata può essere data differentemente (utilizzando il concetto di permutazione o in maniera assiomatica). In tal caso si può dimostrare (Primo Teorema di Laplace) che il determinante si può calcolare come indicato dalla definizione ricorsiva.

v) *Moltiplicando per uno scalare* $\alpha \in \mathbb{K}$ *una riga o una colonna di* A *si ottiene una matrice* B *tale che* $\det(B) = \alpha \det(A)$*,*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \det(A) = 7 - 10 = -3$$

$$B^{(1)} = \alpha A^{(1)}, B^{(2)} = A^{(2)}, B = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 7 & 11 \end{pmatrix}, \det(B) = 11\alpha - 14\alpha = -3\alpha.$$

vi) *Se* $B = \alpha A$*, allora* $\det(B) = \alpha^n \det(A)$*.*

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \alpha A^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha A^{(n)} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \alpha A^{(2)} \\ \vdots \\ \alpha A^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \alpha^2 \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ A^{(2)} \\ \alpha A^{(3)} \\ \vdots \\ \alpha A^{(n)} \end{pmatrix} = \alpha^n \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = \alpha^n \det(A)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \det(A) = 7 - 10 = -3$$

$$B = \alpha A = \begin{pmatrix} \alpha & 2\alpha \\ 7\alpha & 11\alpha \end{pmatrix}, \det(B) = 11\alpha^2 - 14\alpha^2 = -3\alpha^2.$$

vii) *Scambiando tra loro due righe oppure due colonne di* A *si ottiene una matrice* B *tale che* $\det(A) = -\det(B)$*,*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = -2, \ \ \det \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2.$$

viii) *Se due righe o colonne di* A *sono uguali, allora* A *è singolare,* $\det(A) = 0$*.*
Se la matrice A *ha due righe uguali, allora scambiando tali righe tra loro otteniamo ancora la matrice* A*, ma tenendo conto della vii) si ha che* $\det(A) = -\det(A)$*. Quindi* $\det(A) = 0$*.*

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 2 - 2 = 0.$$

ix) *Se due righe o colonne di A sono proporzionali allora A è singolare,* $\det(A) = 0$.
Se $A^{(i)} = \alpha A^{(j)}$, $i \neq j$, allora

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ \alpha A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = \alpha \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(j)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = \alpha 0 = 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 4 - 4 = 0.$$

x) *Se la i–esima riga $A^{(i)}$ (colonna) di A è somma di due vettori riga (colonna) $R, S \in \mathbb{K}^n$, i.e., $A^{(i)} = R + S$, allora*

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ A^{(i)} \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ R+S \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ R \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ S \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix}.$$

$$-11 = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -8 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3 & -2 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix} = -23 + 12.$$

xi) *Se ad una riga (colonna) di A si somma una combinazione lineare di altre righe (colonne) di A, si ottiene una matrice B tale che* $\det(B) = \det(A)$.
Sia B tale che $B^{(i)} = A^{(i)} + \alpha_1 A^{(1)} + \ldots + \alpha_{i-1} A^{(i-1)} + \alpha_{i+1} A^{(i+1)} + \cdots + \alpha_n A^{(n)}$ e $B^{(j)} = A^{(j)}$, per ogni $1 \leq j \leq n$, con $j \neq i$. Allora

$$\det(B) = \det \begin{pmatrix} B^{(1)} \\ \vdots \\ B^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ A^{(i)} + \alpha_1 A^{(1)} + \ldots + \alpha_{i-1} A^{(i-1)} + \alpha_{i+1} A^{(i+1)} + \ldots + \alpha_n A^{(n)} \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ A^{(i)} \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ \alpha A^{(n)} \end{pmatrix} + \alpha_1 \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ A^{(1)} \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + \alpha_2 \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ A^{(2)} \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \det \begin{pmatrix} A^{(1)} \\ \vdots \\ A^{(i-1)} \\ A^{(n)} \\ A^{(i+1)} \\ \vdots \\ A^{(n)} \end{pmatrix} =$$

$$= \det(A) + \alpha_1 0 + \ldots + \alpha_n 0 = \det(A).$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}, \det(A) = 7 - 10 = -3$$

$$B^{(1)} = A^{(1)}, B^{(2)} = 2A^{(1)} + A^{(2)}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}, \det(B) = 11 - 14 = -3.$$

Il prossimo risultato mostra che se $\det(A) \neq 0$, allora le righe (o colonne) di A sono linearmente indipendenti.

Proposizione 4.5. *Se le righe (colonne) di una matrice quadrata A formano un insieme di vettori linearmente dipendenti, allora A è singolare.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ non tutti nulli, tali che $\alpha_1 A^{(1)} + \ldots + \alpha_n A^{(n)} = \mathbf{0}$. In particolare, se $\alpha_i \neq 0$, allora sia B la matrice ottenuta da A, dove $B^{(j)} = A^{(j)}$, $1 \leq j \leq n$, $j \neq i$, e

$$B^{(i)} = A^{(i)} + \frac{\alpha_1}{\alpha_i} A^{(1)} + \ldots + \frac{\alpha_{i-1}}{\alpha_i} A^{(i-1)} + \frac{\alpha_{i+1}}{\alpha_i} A^{(i+1)} + \ldots + \frac{\alpha_n}{\alpha_i} A^{(n)} = \mathbf{0}.$$

Allora da $xi)$ si ha che $\det(A) = \det(B)$. Inoltre la i–esima riga di B è la riga nulla, pertanto $\det(B) = 0$, e dunque $\det(A) = 0$. □

Teorema 4.6. *(Teorema di Binet)*
Se $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, allora $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

4.2 Matrici invertibili

Una matrice quadrata $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *invertibile* se esiste una matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che $AM = MA = I_n$.

Lemma 4.7. *Se esiste l'inversa di una matrice, allora essa è unica.*

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e siano $M, N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tali che $AM = MA = I_n$ e $AN = NA = I_n$. Allora $M = MI_n = M(AN) = (MA)N = I_nN = N$. Quindi $M = N$. □

L'*inversa* di A si denota con A^{-1}. Denoteremo con $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ il sottoinsieme di $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ costituito dalle matrici invertibili.

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \ \mid \ A \text{ invertibile}\}.$$

Lemma 4.8. *i) Siano $A, M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Se $AM = I_n$, allora $MA = I_n$.*

ii) Se $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, allora $AB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

iii) $I_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e $I_n^{-1} = I_n$.

iv) Se $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, allora $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$.

v) Se $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, allora $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e $(A^{-1})^{-1} = A$.

Dimostrazione. i) Supponiamo che $AM = I_n$, allora $MA = I_n(MA) = (A^{-1}A)MA = A^{-1}(AM)A = A^{-1}I_nA = A^{-1}A = I_n$.

ii) Si noti che $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n$. Pertanto $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

iv) Poichè A è invertibile, esiste $A^{-1} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$. Allora $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Pertanto $\det(A^{-1}) = 1/\det(A) = \det(A)^{-1}$. □

Proposizione 4.9. $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ *è un gruppo. Infatti:*

i) $\forall A, B, C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $A(BC) = (AB)C$;

ii) $\forall A \in \mathrm{GL}_n$, $AI_n = I_nA = A$;

iii) $\forall A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, allora $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ e $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$.

Si dice *matrice aggiunta* di $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, e si denota con $Agg(A)$, la matrice che ha come elemento di posto i, j, il complemento algebrico dell'elemento di A^t di posto i, j, che è $(-1)^{i+j}\det(A_{ji})$.

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & \cdots & (-1)^{n+1}\det(A_{n1}) \\ -\det(A_{12}) & \det(A_{22}) & \cdots & (-1)^{n+2}\det(A_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det(A_{1n}) & (-1)^{2+n}\det(A_{2n}) & \cdots & \det(A_{nn}) \end{pmatrix}$$

Esempi 4.10. 1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ Agg(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}.$$

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ Agg(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il seguente risultato caratterizza le matrici invertibili.

Teorema 4.11. *$A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ è se e solo se $\det(A) \neq 0$.*

Dimostrazione. Se A è invertibile, esiste $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $AA^{-1} = I_n$. Quindi $\det(AA^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1$. Allora $\det(A) \neq 0$.

Sia $\det(A) \neq 0$. Mostriamo che $AAgg(A) = \det(A)I_n$. Infatti

$$
\begin{aligned}
&AAgg(A) = \\
&= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \det(A_{11}) & -\det(A_{21}) & \cdots & (-1)^{n+1}\det(A_{n1}) \\ -\det(A_{12}) & \det(A_{22}) & \cdots & (-1)^{n+2}\det(A_{n2}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-1)^{1+n}\det(A_{1n}) & (-1)^{2+n}\det(A_{2n}) & \cdots & \det(A_{nn}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{1j}\det(A_{1j}) & \sum_{j=1}^n (-1)^{2+j} a_{1j}\det(A_{2j}) & \cdots & \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{1j}\det(A_{nj}) \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{2j}\det(A_{1j}) & \sum_{j=1}^n (-1)^{2+j} a_{2j}\det(A_{2j}) & \cdots & \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{2j}\det(A_{nj}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^n (-1)^{1+j} a_{nj}\det(A_{1j}) & \sum_{j=1}^n (-1)^{2+j} a_{nj}\det(A_{2j}) & \cdots & \sum_{j=1}^n (-1)^{n+j} a_{nj}\det(A_{nj}) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det(A) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)I_n.
\end{aligned}
$$

□

Pertanto A^{-1}, l'inversa di A, si può ottenere dividendo ciascun elemento dell'aggiunta di A per il determinante di A.

Corollario 4.12. *$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}Agg(A)$.*

Esempi 4.13. 1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \ \ \det(A) = 11.$$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & -3 & 10 \\ 4 & 1 & -7 \end{pmatrix}, \ \ A^{-1} = \begin{pmatrix} -3/11 & 2/11 & 8/11 \\ -1/11 & -3/11 & 10/11 \\ 4/11 & 1/11 & -7/11 \end{pmatrix}.$$

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \ \ \det(A) = 3.$$

$$Agg(A) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \ \ A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}.$$

4.3 Rango di una matrice

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, il *rango per righe* di A è il massimo numero di righe linearmente indipendenti di A, dove i vettori riga di A sono considerati come vettori di $\mathbb{K}^n$. Analogamente, il *rango per colonne* di A è il massimo numero di colonne linearmente indipendenti di A, dove i vettori colonna di A (trasposti) sono considerati come vettori di $\mathbb{K}^m$.

Osservazione 4.14. Dalla definizione di rango per righe o colonne e dal Corollario 2.28 segue che il rango per righe di A è pari a $\dim\left(\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(m)} \rangle\right)$, mentre il rango per colonne di A è pari a $\dim\left(\langle A_{(1)}, \ldots, A_{(n)} \rangle\right)$.

Proposizione 4.15. *Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, allora il rango per righe ed il rango per colonne di A coincidono.*

Dimostrazione. Sia $A = (a_{ij})$, dove $\dim\left(\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(m)} \rangle\right) = r$ e $\dim\left(\langle A_{(1)}, \ldots, A_{(n)} \rangle\right) = s$. Vogliamo provare che $r = s$. Poichè $\dim\left(\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(m)} \rangle\right) = r$, vi sono r vettori $A^{(i_1)}, \ldots, A^{(i_r)}$ che formano una base per $\langle A^{(1)}, \ldots, A^{(m)} \rangle$. Allora

$$\left\{ \begin{array}{ccc} A^{(1)} & = & \lambda_{11}A^{(i_1)} + \lambda_{12}A^{(i_2)} + \ldots + \lambda_{1r}A^{(i_r)} \\ A^{(2)} & = & \lambda_{21}A^{(i_1)} + \lambda_{22}A^{(i_2)} + \ldots + \lambda_{2r}A^{(i_r)} \\ \vdots & & \\ A^{(m)} & = & \lambda_{m1}A^{(i_1)} + \lambda_{m2}A^{(i_2)} + \ldots + \lambda_{mr}A^{(i_r)} \end{array} \right. \tag{4.1}$$

Uguagliando le j–esime componenti dei due membri della (4.1) si ha

$$\left\{ \begin{array}{ccc} a_{1j} & = & \lambda_{11}a_{i_1j} + \lambda_{12}a_{i_2j} + \ldots + \lambda_{1r}a_{i_rj} \\ a_{2J} & = & \lambda_{21}a_{i_1j} + \lambda_{22}a_{i_2j} + \ldots + \lambda_{2r}a_{i_rj} \\ \vdots & & \\ a_{mj} & = & \lambda_{m1}a_{i_1j} + \lambda_{m2}a_{i_2j} + \ldots + \lambda_{mr}a_{i_rj} \end{array} \right. \tag{4.2}$$

In forma matriciale la (4.2) si esprime come segue

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2J} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} = a_{i_1j} \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix} + a_{i_2j} \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + a_{i_rj} \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ \vdots \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Posto

$$L_{(1)} = \begin{pmatrix} \lambda_{11} \\ \lambda_{21} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{pmatrix}, \; L_{(2)} = \begin{pmatrix} \lambda_{12} \\ \lambda_{22} \\ \vdots \\ \lambda_{m2} \end{pmatrix}, \; \ldots, L_{(r)} = \begin{pmatrix} \lambda_{1r} \\ \lambda_{2r} \\ \vdots \\ \lambda_{mr} \end{pmatrix},$$

dalla (4.3), si ha che

$$A_{(j)} = a_{i_1j}L_{(1)} + a_{i_2j}L_{(2)} + \ldots + a_{i_rj}L_{(r)}$$

e pertanto

$$A_{(j)} \in \langle L_{(1)}, L_{(2)}, \dots, L_{(r)} \rangle,\ 1 \le j \le n.$$

Ne segue che

$$s = \dim\big(\langle A_{(1)}, \dots, A_{(n)} \rangle\big) \le \dim\big(\langle L_{(1)}, \dots, L_{(r)} \rangle\big) \le r.$$

Analogamente, partendo dalle colonne di A invece che dalle righe, si ottiene $r \le s$. □

In base al risultato precedente possiamo definire il *rango* di A come il massimo numero di righe o colonne linearmente indipendenti di A. Il rango di A si denota con $rg(A)$.

4.3.1 Metodo di Gauss

Proposizione 4.16. *Il rango di una matrice non cambia se essa viene sottoposta ad una qualunque selle seguenti operazioni, dette* operazioni elementari di riga*:*

i) scambio di due righe,

ii) moltiplicazione di una riga per uno scalare non nullo,

iii) somma di un multiplo di una riga ad un'altra riga.

Dimostrazione. Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Sia B la matrice ottenuta da A scambiando le righe s, t, dove $1 \le s < t \le m$. Allora

$$\langle A^{(1)}, \dots, A^{(t)}, \dots, A^{(s)}, \dots, A^{(m)} \rangle = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(s)}, \dots, A^{(t)}, \dots, A^{(m)} \rangle$$

e

$$\begin{aligned} rg(B) &= \dim\big(\langle A^{(1)}, \dots, A^{(t)}, \dots, A^{(s)}, \dots, A^{(m)} \rangle\big) = \\ &= \dim\big(\langle A^{(1)}, \dots, A^{(s)}, \dots, A^{(t)}, \dots, A^{(m)} \rangle\big) = rg(A). \end{aligned}$$

Sia B la matrice ottenuta moltiplicando la t–esima riga di A per uno scalare $c \in \mathbb{K}$, con $c \neq 0$. Allora

$$\langle A^{(1)}, \dots, cA^{(t)}, \dots, A^{(m)} \rangle = \langle A^{(1)}, \dots, A^{(t)}, \dots, A^{(m)} \rangle$$

e

$$\begin{aligned} rg(B) &= \dim\big(\langle A^{(1)}, \dots, cA^{(t)}, \dots, A^{(m)} \rangle\big) = \\ &= \dim\big(\langle A^{(1)}, \dots, A^{(t)}, \dots, A^{(m)} \rangle\big) = rg(A). \end{aligned}$$

Infine, se B è la matrice ottenuta da A sostituendo alla s–esima riga di A, $A^{(s)}$, la combinazione lineare $A^{(s)} + cA^{(t)}$, per qualche $c \in \mathbb{K}$ e $s \neq t$. Si noti che

$$\langle A^{(1)}, \dots, A^{(s)} + cA^{(t)}, \dots, A^{(m)} \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \dots, A^{(t)}, \dots, A^{(m)} \rangle.$$

Inoltre, poichè $A^{(s)} = (A^{(s)} + cA^{(t)}) - cA^{(t)}$, si ha che

$$\langle A^{(1)}, \dots, A^{(m)} \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \dots, A^{(s)} + cA^{(t)}, \dots, A^{(m)} \rangle.$$

Pertanto anche in questo caso $rg(A) = rg(B)$. Per maggiori dettagli si veda Osservazione 2.19. □

Il prossimo risultato, che si dimostra facilmente utilizzando le proprietà del determinante (Proposizione 4.4), osserva che il determinante di una matrice non è preservato se la matrice è sottoposta ad operazioni elementari di riga.

Proposizione 4.17. *Sia* $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

i) Se B *è ottenuta da* A *scambiando tra loro due righe, allora* $\det(B) = -\det(A)$*;*

ii) Se B *è ottenuta da* A *moltiplicando una riga per uno scalare* $0 \neq \lambda \in \mathbb{K}$*, allora* $\det(B) = \lambda \det(A)$*;*

iii) Se B *è ottenuta da* A *sommando ad una riga di* A *un multiplo di un'altra riga, allora* $\det(B) = \det(A)$.

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Il *pivot* di una riga è il primo elemento non nullo di quella riga. In altri termini l'elemento a_{ij} si definisce *pivot* della i–esima riga di A, se j è il più piccolo intero tale che $a_{ij} \neq 0$. Quindi $a_{ij} \neq 0$ e $a_{ih} = 0$, per ogni $h < j$.

La matrice A si dice *a gradini* se le righe nulle della matrice si trovano in basso ed ogni pivot si trova a sinistra di tutti i pivots delle righe successive. Pertanto A è *a gradini* se valgono le seguenti proprietà:

i) se a_{ij} è il pivot della i–esima riga, allora $a_{kj} = 0$ per ogni $i < k \leq m$,

ii) se a_{ij} è il pivot della i–esima riga e a_{kh} è il pivot della k–esima riga, con $i < k$, allora $j < h$,

iii) ogni riga non nulla precede ogni riga nulla.

Teorema 4.18. *(Metodo di Gauss)*
Ogni matrice può essere trasformata in una matrice a gradini mediante operazioni elementari di riga. Il rango di una matrice a gradini è pari al numero delle sue righe non nulle.

Esempi 4.19. 1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}), \quad 1 \leq rg(A) \leq 3.$$

$$R_3' = R_2 + 2R_1 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 7 & 10 \end{pmatrix}, R_3' = R_3 + 3R_2 \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 16 & 13 \end{pmatrix},$$

pertanto $rg(A) = 3$.

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 1 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,6}(\mathbb{R}), \quad 1 \leq rg(A) \leq 4.$$

$$\begin{matrix} R_2' = R_2 - R_1 \\ R_3' = R_3 - 5R_1 \\ R_4' = R_4 - 3R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & -4 & -6 \\ 0 & 14 & 1 & 11 & -17 & -23 \\ 0 & -11 & 0 & 7 & -13 & -17 \end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix} R_3' = 3R_3 - 14R_2 \\ R_4' = 3R_4 - 11R_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -11 & -23 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & -11 & -23 & 5 & 15 \end{pmatrix},$$

$$R_4' = R_4 - R_3 \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 0 & -3 & 1 & 4 & -4 & -6 \\ 0 & 0 & -11 & -23 & 5 & 15 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

pertanto $rg(A) = 3$.

Calcolo dell'inversa

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Si consideri la matrice $(A|I_n)$. Se A è invertibile, effettuando operazioni elementari di riga, è possibile ottenere una matrice della forma $(I_n|B)$. Allora $B = A^{-1}$.

Esempi 4.20. 1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad \det(A) = 11.$$

$$(A|I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,6}(\mathbb{R}).$$

$$\begin{matrix} R_2' = R_2 - 3R_1 \\ R_3' = R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_3' = 7R_3 - R_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -4 & -1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$R_1' = 7R_1 + 2R_2 \begin{pmatrix} 7 & 0 & 8 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -7 & -10 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -11 & -4 & -1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{matrix} R_1' = 11R_1 + 8R_3 \\ R_2' = 11R_2 - 10R_3 \end{matrix} \begin{pmatrix} 77 & 0 & 0 & -21 & 14 & 56 \\ 0 & -77 & 0 & 7 & 21 & -70 \\ 0 & 0 & -11 & -4 & -1 & 7 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{r} R_1' = R_1/77 \\ R_2' = R_2/-77 \\ R_3' = R_3/-11 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -3/11 & 2/11 & 8/11 \\ 0 & 1 & 0 & -1/11 & 3/11 & 10/11 \\ 0 & 0 & 1 & 4/11 & 1/11 & -7/11 \end{pmatrix} = (I_3|A^{-1}).$$

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}), \quad \det(A) = 3.$$

$$(A|I_3) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,6}(\mathbb{R}).$$

$$R_3' = R_3 + R_1 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{r} R_3' = R_3 - R_2 \\ R_1' = R_1 - R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$R_1' = 3R_1 - 2R_3 \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{r} R_1' = R_1/3 \\ R_3' = R_3/3 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/3 & -1/3 & -2/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix} = (I_3|A^{-1}).$$

4.3.2 Metodo degli orlati

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Si chiama *minore di ordine* k, con $k \leq \min\{m, n\}$, il determinante di una qualunque sottomatrice quadrata di ordine k ottenuta sopprimendo $m - k$ righe ed $n - k$ colonne di A.

Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e sia M una sua sottomatrice, *orlare* M significa completare la sottomatrice M con una riga ed una colonna di A non appartenenti ad M.

Proposizione 4.21. *Se B è una sottomatrice di A, allora $rg(B) \leq rg(A)$.*

Dimostrazione. Sia B una sottomatrice $p \times q$ della matrice $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Sia $C \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ la matrice formata dalle p righe di A in comune con B. Poichè

$$\langle C^{(1)}, \ldots, C^{(p)} \rangle \subseteq \langle A^{(1)}, \ldots, A^{(m)} \rangle,$$

si ha che $rg(C) \leq rg(A)$. Analogamente, poichè

$$\langle B_{(1)}, \ldots, B_{(q)} \rangle \subseteq \langle C_{(1)}, \ldots, C_{(n)} \rangle,$$

segue che $rg(B) \leq rg(C)$. Quindi $rg(B) \leq rg(A)$. □

Proposizione 4.22. *i) Se $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, allora $rg(AB) \leq \min\{rg(A), rg(B)\}$.*

ii) Se $A \in \mathrm{GL}_m(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, allora $rg(AB) = rg(B) = rg(BC)$.

Dimostrazione. i) Se $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ e $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, allora la i–esima riga della matrice $AB \in \mathcal{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ risulta

$$A^{(i)}B = (a_{i1}b_{11} + \ldots + a_{in}b_{n1}, a_{i1}b_{12} + \ldots + a_{in}b_{n2}, \ldots, a_{i1}b_{1p} + \ldots + a_{in}b_{np}) =$$

$$= (a_{i1}b_{11}, a_{i1}b_{12}, \ldots, a_{i1}b_{1p}) + (a_{i2}b_{21}, a_{i2}b_{22}, \ldots, a_{i2}b_{2p}) + \ldots + (a_{in}b_{n1}, a_{in}b_{n2}, \ldots, a_{in}b_{np}) =$$
$$= a_{i1}B^{(1)} + a_{i2}B^{(2)} + \ldots + a_{in}B^{(n)}.$$

Pertanto $A^{(i)}B \in \langle B^{(1)}, B^{(2)}, \ldots, B^{(n)}\rangle$, $1 \leq i \leq m$ e quindi $rg(AB) \leq rg(B)$. Inoltre si ha che

$$rg(AB) = rg((AB)^t) = rg(B^tA^t) \leq rg(A^t) = rg(A).$$

ii) Dalla i) si ha che

$$rg(AB) \leq rg(B) = rg((A^{-1}A)B) = rg(A^{-1}(AB)) \leq rg(AB),$$

e quindi $rg(AB) = rg(B)$. Analogamente

$$rg(BC) \leq rg(B) = rg(B(CC^{-1})) = rg((BC)C^{-1}) \leq rg(BC),$$

da cui segue che $rg(BC) = rg(B)$. □

Teorema 4.23. *Una matrice quadrata di ordine n è invertibile se e solo se ha rango n.*

Dimostrazione. Se la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è invertibile, allora dalla Proposizione 4.22 ii), si ha che $rg(A) = rg(AA^{-1}) = rg(I_n) = n$ e la matrice A ha lo stesso rango di I_n. In particolare $rg(I_n) = n$. Viceversa, se A ha rango n, le sue righe $A^{(1)}, A^{(2)}, \ldots, A^{(n)}$ sono linearmente indipendenti e quindi costituiscono una base di $\mathbb{K}^n$. Esistono, pertanto, per ogni $i = 1, \ldots, n$, degli scalari $b_{i1}, \ldots, b_{in} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\mathbf{e}_i = b_{i1}A^{(1)} + b_{i2}A^{(2)} + \ldots + b_{in}A^{(n)}.$$

Sia $B = (b_{ij}) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Allora $\mathbf{e}_i = B^{(i)}A$, quindi $I_n = BA$ ed A è invertibile. □

Teorema 4.24. *Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, allora $rg(A)$ coincide con il massimo ordine dei minori non nulli di A.*

Dimostrazione. Sia ρ il massimo ordine dei minori non nulli di A. Mostriamo prima che $\rho \leq rg(A)$. Infatti se denotiamo con M una sottomatrice quadrata di A di ordine ρ che ha determinante diverso da zero, allora, dalla Proposizione 4.5, si ha che le righe di M sono linermente indipendenti e quindi $rg(M) = \rho$. Inoltre, essendo M una sottomatrice di A, dalla Proposizione 4.21 si ottiene $\rho \leq rg(A)$.

Viceversa, se $r = rg(A)$, allora in A vi sono r righe linearmente indipendenti ed in particolare r è il massimo numero di righe di A linearmente indipendenti. Sia $B \in \mathcal{M}_{r,n}(\mathbb{K})$ la sottomatrice di A costituita dalle righe di A che sono linearmente indipendenti. Per costruzione, le r righe della matrice B sono linermente indipendenti, pertanto $rg(B) \geq r$. Dalla Proposizione 4.21, si ha che $rg(B) = r$ ed allora B contiene r colonne linearmente indipendenti. Sia C la sottomatrice quadrata di ordine r di B formata dalle r colonne di B linearmente indipendenti. La matrice C ha rango r e dal Teorema 4.23 risulta invertibile. Dal Teorema 4.11 si ha che $\det(C) \neq 0$, $\det(C)$ è un minore non nullo di A di ordine r e $\rho \geq r$. $\square$

I seguenti risultati discendono facilmente dal teorema appena dimostrato.

Teorema 4.25. *(Teorema di Kronecker o Metodo degli orlati)*
Sia $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, allora $rg(A) = k$ se e solo se esiste in A un minore non nullo di ordine k per il quale tutti i minori orlati sono nulli.

Corollario 4.26. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, allora $rg(A) = n$ se e solo se* $\det(A) \neq 0$.

Corollario 4.27. *Una matrice quadrata è invertibile se e solo se è non singolare.*

Corollario 4.28. *Una matrice quadrata è singolare se e solo se le sue righe (colonne) formano un insieme di vettori linearmente dipendenti.*

Esempi 4.29. 1. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ -2 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,4}(\mathbb{R}), \quad 1 \leq rg(A) \leq 3.$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 16,$$

pertanto $rg(A) = 3$.

2. Sia

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 & 5 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 1 & 8 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4,6}(\mathbb{R}), \quad 1 \leq rg(A) \leq 4.$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -3 \neq 0, \quad rg(A) \geq 2,$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 \end{pmatrix} = -5 + 16 = 11 \neq 0, \quad rg(A) \geq 3,$$

$$\det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & 1 & 8 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 1 & 7 \\ 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 0,$$

pertanto $rg(A) = 3$.

5 Sistemi di equazioni lineari

Siano $X_1, \ldots, X_n$ indeterminate. Un'equazione lineare (o di primo grado) nelle incognite $X_1, \ldots, X_n$ a coefficienti nel campo $\mathbb{K}$ è della forma

$$a_1X_1 + \ldots + a_nX_n = b, \quad a_i, b \in \mathbb{K}, 1 \leq i \leq n. \tag{5.1}$$

Una soluzione di (5.1) è un elemento $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che sostituito al posto della n–upla delle indeterminate $(X_1, \ldots, X_n)$ dà luogo ad un'identità. L'equazione (5.1) si dice *omogenea* se $b = 0$, altrimenti si dice *non omogenea*.

Se si considerano simultaneamente $m \geq 1$ equazioni lineari nelle incognite $X_1, \ldots, X_n$:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}, \tag{5.2}$$

si ottiene un *sistema* di m equazioni lineari nelle incognite $X_1, \ldots, X_n$.

Il sistema (5.2) si dice *omogeneo* se $b_1 = \ldots = b_m = 0$, mentre si dice *non omogeneo* se $b_i \neq 0$, per qualche i, con $1 \leq i \leq m$. Una soluzione di (5.2) è una n–upla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che essa è soluzione simultanea delle m equazioni lineari di (5.2). Il sistema (5.2) si dice *compatibile* se ammette soluzioni, altrimenti si dice *non compatibile*.

Si noti che ogni sistema omogeneo è compatibile, in quanto ammette sempre come soluzione il vettore nullo di $\mathbb{K}^n$. Tale soluzione è detta *soluzione banale*. Una soluzione diversa dal vettore nullo si dice *soluzione non–banale*.

Il sistema

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = 0 \end{cases}, \tag{5.3}$$

si dice *sistema omogeneo associato a* (5.2).

Al sistema (5.2) è possibile associare la matrice formata dai coefficienti del sistema:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

A è detta *matrice associata al sistema* (5.2) o *matrice dei coefficienti del sistema* (5.2) o *matrice incompleta del sistema* (5.2). Aggiungendo ad A come $(n+1)$–esima colonna la colonna dei termini noti $\boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ si ottiene

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_m \end{pmatrix}$$

che è detta *matrice completa del sistema* (5.2) ed verrà denotata anche con $(A|\boldsymbol{b})$. Ponendo $X = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$, si ha che il sistema (5.2) si può esprimere in forma matriciale come segue

$$AX = \boldsymbol{b}.$$

Analogamente il sistema omogeneo associato (5.3) risulta

$$AX = \mathbf{0}^t = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pertanto un vettore $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ è soluzione del sistema $AX = \boldsymbol{b}$ se

$$A\mathbf{v}^t = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \boldsymbol{b}.$$

Due sistemi di equazioni lineari nelle incognite $X_1, \dots, X_n$ si dicono *equivalenti* se possiedono le stesse soluzioni. (Si noti che due sistemi equivalenti non necessariamente hanno lo stesso numero di equazioni).

Proposizione 5.1. *Se il sistema $AX = \boldsymbol{b}$ è compatibile, allora le sue soluzioni sono tutte e sole le n–uple ottenute sommando ad una di esse le soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = \mathbf{0}^t$.*

Dimostrazione. Si denotino con $\mathcal{S}$ e $\mathcal{S}_0$ i sottoinsiemi di $\mathbb{K}^n$ le cui n–uple sono rispettivamente le soluzioni del sistema $AX = \boldsymbol{b}$ e del sistema omogeneo associato $AX = \mathbf{0}^t$. Se $\mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathcal{S}$, allora $\forall\, \mathbf{w} = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{S}_0$, si ha che $\mathbf{v} + \mathbf{w} = (x_1, \dots, x_n) + (y_1, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, \dots, x_n + y_n) \in \mathcal{S}$. Infatti

$$A(\mathbf{v} + \mathbf{w})^t = A(\mathbf{v}^t + \mathbf{w}^t) = A\mathbf{v}^t + A\mathbf{w}^t = \boldsymbol{b} + \mathbf{0}^t = \boldsymbol{b}.$$

Viceversa, se $\mathbf{v} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathcal{S}$, allora $\forall\, \mathbf{u} = (z_1, \ldots, z_n) \in \mathcal{S}$, si ha che $\mathbf{u} - \mathbf{v} = (z_1 - x_1, z_2 - x_2, \ldots, z_n - x_n) \in \mathcal{S}_0$. Infatti

$$A(\mathbf{u} - \mathbf{v})^t = A(\mathbf{u}^t - \mathbf{v}^t) = A\mathbf{u}^t - A\mathbf{v}^t = \boldsymbol{b} - \boldsymbol{b} = \mathbf{0}^t.$$

□

Un sistema di equazioni lineari nelle incognite $X_1, \ldots, X_n$ si dice *a gradini* se la matrice associata al sistema è a gradini.

Proposizione 5.2. *Un sistema a gradini di m equazioni in n incognite è compatibile se e solo se $rg(A) = rg(\bar{A}) = r$. In tal caso esso ammette un'unica soluzione oppure ∞^{n-r} soluzioni a seconda che $n = r$ oppure $r < n$.*

Dimostrazione. Sia $rg(A) = r$. Se $rg(\bar{A}) \neq rg(A)$, allora $rg(\bar{A}) = r + 1$ ed il sistema sarà del tipo

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ \quad a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad 0 = b_{r+1} \end{cases}$$

e quindi non compatibile.

Se $rg(\bar{A}) = r$, allora o $r = n$ oppure $r < n$. Nel primo caso (se $r = n$) il sistema sarà del tipo

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ \quad a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad a_{nn}X_n = b_n \end{cases}$$

Allora dall'ultima equazione si ha $x_n = a_{nn}^{-1}b_n$ e procedendo con le sostituzioni a ritroso si ottiene un'unica soluzione $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$. Pertanto un sistema di equazioni lineari a gradini di n equazioni in n incognite è compatibile e possiede un'unica soluzione.

Nel secondo caso (se $r < n$), sia a_{ij} il pivot della i–esima riga della matrice A associata al sistema. Si noti che se a_{ij} è il pivot della i–esima riga e a_{kh} è il pivot della k–esima riga, con $i < k$, allora $j < h$. Possiamo supporre che $X_1, \ldots, X_r$ siano le incognite del sistema aventi come coefficienti i pivot della matrice A. Allora il sistema considerato è equivalente al seguente:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1r}X_r = b_1 - (a_{1r+1}X_{r+1} + \ldots + a_{1n}X_n) \\ \quad a_{22}X_2 + \ldots + a_{2r}X_r = b_2 - (a_{2r+1}X_{r+1} + \ldots + a_{2n}X_n) \\ \quad\quad \vdots \\ \quad\quad a_{rr}X_r = b_r - (a_{rr+1}X_{r+1} + \ldots + a_{rn}X_n) \end{cases} \tag{5.4}$$

Attribuendo valori arbitrari $t_{m+1}, \ldots, t_n \in \mathbb{K}$ alle incognite $X_{r+1}, \ldots, X_n$ si ottiene un sistema a gradini di r equazioni nelle r incognite $X_1, \ldots, X_r$, il quale ha un'unica soluzione.

Pertanto il sistema (5.4) ammette le infinite soluzioni al variare dei parametri $t_{r+1}, \dots, t_n \in \mathbb{K}$. Pertanto un sistema di equazioni lineari a gradini di m equazioni in n incognite è compatibile e possiede ∞^{n-r} soluzioni. □

Osservazione 5.3. Un'equazione lineare $a_1X_1 + \ldots + a_nX_n = b$, con $(a_1, \ldots, a_n) \neq (0, \ldots, 0)$, si può considerare come un sistema a gradini, pertanto essa possiede ∞^{n-1} soluzioni.

5.1 Metodo di eliminazione di Gauss–Jordan

Il *metodo di eliminazione di Gauss–Jordan* consente di stabilire se un sistema è compatibile ed in caso affermativo di trovarne le soluzioni. Esso consiste nel sostituire il sistema assegnato con un sistema a gradini ad esso equivalente mediante passaggi successivi detti *operazioni elementari sulle equazioni del sistema*, che corrispondono ad altrettante operazioni elementari di riga sulle righe della matrice completa del sistema.

Proposizione 5.4. *Le soluzioni di un sistema non cambiano se esso viene sottoposto ad una qualunque selle seguenti operazioni, dette* operazioni elementari sulle equazioni*:*

i) scambio di due equazioni,

ii) moltiplicazione di entrambi i membri di un'equazione per uno scalare non nullo,

iii) somma di un multiplo di una equazione ad un'altra equazione.

Se si effettua su un sistema un'operazione elementare di tipo i), il nuovo sistema che si ottiene è equivalente al precedente in quanto le soluzioni di un sistema non dipendono dall'ordine in cui si considerano le sue equazioni.

Analogamente, se si effettua un'operazione di tipo ii), le soluzioni non cambiano in quanto equazioni proporzionali hanno le stesse soluzioni.

Infine se si effettua una operazione di tipo iii), allora anche in tal caso si ottengono sistemi equivalenti. Infatti la n–upla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ soddisfa due equazioni

$$a_{i1}X_1 + \ldots + a_{in}X_n = b_i, \;\; a_{j1}X_1 + \ldots + a_{jn}X_n = b_j,$$

se e solo se è soluzione delle equazioni

$$a_{i1}X_1 + \ldots + a_{in}X_n = b_i, \;\; c(a_{i1}X_1 + \ldots + a_{in}X_n) + (a_{j1}X_1 + \ldots + a_{jn}X_n) = cb_i + b_j,$$

per ogni scalare $c \in \mathbb{K}$.

Esempi 5.5. Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$.

1.
$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 1 \\ 2X_1 + X_2 + 4X_3 = 2 \\ 3X_1 - 3X_2 + X_3 = 1 \end{cases}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2' = R_2 - 2R_1 \\ R_3' = R_3 - 3R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & -9 & -8 & -2 \end{pmatrix},$$

$$R_3' = R_3 - 3R_2 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} X_1 + 2X_2 + 3X_3 = 1 \\ -3X_2 - 2X_3 = 0 \\ -2X_3 = -2 \end{cases},$$

pertanto l'unica soluzione del sistema è $\left(-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, 1\right) \in \mathbb{R}^3$.

2.

$$\begin{cases} X_3 + 2X_4 = 3 \\ 2X_1 + 4X_2 - 2X_3 = 4 \\ 2X_1 + 4X_2 - X_3 + 2X_4 = 7 \end{cases}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

$$R_3' = R_1 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 2 & 4 & -2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$R_2' = R_2 - R_1 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

$$R_3' = R_3 + R_2 \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} 2X_1 + 4X_2 - X_3 + 2X_4 = 7 \\ -X_3 - 2X_4 = -3 \\ 0 = 0 \end{cases}, \quad X_4 = u, X_2 = t, X_3 = 3 - 2u, X_1 = 5 - 2u - 2t,$$

pertanto il sistema ammette le ∞^2 soluzioni: $(5 - 2u - 2t, t, 3 - 2u, u) \in \mathbb{R}^4$, $t, u \in \mathbb{R}$.

3.

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \\ X_1 + X_2 + X_3 + 2X_4 - X_5 = 0 \\ X_1 + X_2 + 3X_4 - 2X_5 = 0 \\ X_1 + X_2 + 3X_3 + X_5 = 0 \end{cases}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} R_2' = R_2 - R_1 \\ R_3' = R_3 - R_1 \\ R_4' = R_4 - R_1 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{array}{l} R_3' = R_3 - 2R_2 \\ R_4' = R_4 - R_2 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} X_1 + X_2 + 2X_3 + X_4 = 0 \\ -X_3 + X_4 - X_5 = 0 \end{cases}, \quad X_4 = u, X_5 = v, X_2 = t, X_3 = u-v, X_1 = -t-3u+2v,$$

pertanto il sistema ammette le ∞^3 soluzioni: $(-t - 3u + 2v, t, u - v, u, v) \in \mathbb{R}^5$, $t, u, v \in \mathbb{R}$.

4.

$$\begin{cases} X_1 - 5X_2 - 8X_3 + X_4 = 3 \\ 3X_1 + X_2 - 3X_3 - 5X_4 = 1 \\ X_1 - 7X_3 + 2X_4 = -5 \\ 11X_2 + 20X_3 - 9X_4 = 2 \end{cases}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & -3 & -5 & 1 \\ 1 & 0 & -7 & 2 & -5 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} R_2' = R_2 - 3R_1 \\ R_3' = R_3 - R_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & 5 & 1 & 1 & -8 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{pmatrix},$$

$$R_3' = R_3 - R_2 \begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & -11 & -20 & 9 & 0 \\ 0 & 11 & 20 & -9 & 2 \end{pmatrix},$$

$$R_4' = R_4 + R_3 \begin{pmatrix} 1 & -5 & -8 & 1 & 3 \\ 0 & 16 & 21 & -8 & -8 \\ 0 & -11 & -20 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} X_1 - 5X_2 - 8X_3 + X_4 = 3 \\ 16X_2 + 21X_3 - 8X_4 = -8 \\ -11X_2 - 20X_3 + 9X_4 = 0 \\ 0 = 2 \end{cases},$$

pertanto il sistema non ammette soluzioni.

Teorema 5.6. *(Teorema di Rouché–Capelli)*
Un sistema di m equazioni in n incognite $AX = \boldsymbol{b}$, dove $A \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$, è compatibile se e solo se $rg(A) = rg(A|\boldsymbol{b}) = r$. In tal caso esso ammette un'unica soluzione oppure ∞^{n-r} soluzioni a seconda che $n = r$ oppure $r < n$.

Dimostrazione. Sia $A = (a_{ij})$. Allora la n–upla $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ è soluzione di $AX = b$ se e solo se

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \ldots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Pertanto il vettore colonna $\boldsymbol{b}$ è combinazione lineare dei vettori colonna di A. Questa ultima condizione è equivalente a $rg(A|\boldsymbol{b}) = rg(A)$.

Se il sistema è compatibile e $r = rg(A)$, allora possiamo supporre che le prime r righe di A siano linearmente indipendenti ed applicando Gauss–Jordan è possibile trasformarlo in un sistema a gradini con r equazioni. Allora, dalla Proposizione 5.2, esso ammetterà un'unica soluzione oppure ∞^{n-r} soluzioni a seconda che $n = r$ oppure $r < n$. $\square$

Teorema 5.7. *(Teorema di Cramer)*
Un sistema di n equazioni in n incognite $AX = \boldsymbol{b}$, dove $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, $\boldsymbol{b} \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{K})$, $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$, è compatibile ed ammette l'unica soluzione $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$, dove

$$x_i = \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+i} b_k \det(A_{ki})}{\det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Dimostrazione. Poichè $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, allora esiste $A^{-1} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Pertanto

$$A^{-1}(AX) = A^{-1}\boldsymbol{b}.$$

Inoltre $A^{-1}(AX) = (A^{-1}A)X = I_n X = X$ e quindi $X = A^{-1}\boldsymbol{b}$. Se ne deduce che

$$x_j = \frac{\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+j} b_k \det(A_{kj})}{\det(A)}. \tag{5.5}$$

Si noti che il numeratore di (5.5) è il determinante della matrice ottenuta sostituendo alla j–esima colonna di A la colonna dei termini noti $\boldsymbol{b}$ sviluppato secondo Laplace rispetto alla j–esima colonna. $\square$

5.2 Sistemi lineari omogenei e sottospazi vettoriali di $\mathbb{R}^n$

Si consideri un sistema lineare omogeneo di m equazioni nelle n indeterminate $X_1, \ldots, X_n$ a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = 0 \end{cases}.$$

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ la matrice associata al sistema, allora in forma matriciale tale sistema risulta

$$AX = \mathbf{0}^t.$$

Il prossimo risultato mostra che l'insieme delle soluzioni forma un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.

Proposizione 5.8. *Sia $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathbb{K}^n$ l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo $AX = \mathbf{0}^t$. Allora $\mathcal{S}_0$ è uno sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$ e $\dim(\mathcal{S}_0) = n - r$, dove $r = rg(A)$.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathcal{S}_0$. Allora $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 \in \mathcal{S}_0$. Infatti $A(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)^t = A(\mathbf{v}_1^t + \mathbf{v}_2^t) = A\mathbf{v}_1^t + A\mathbf{v}_2^t = \mathbf{0}^t + \mathbf{0}^t = \mathbf{0}^t$. Inoltre se $\lambda \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{v} \in \mathcal{S}_0$, allora $\lambda\mathbf{v} \in \mathcal{S}_0$. Infatti $A(\lambda\mathbf{v})^t = A\lambda\mathbf{v}^t = \lambda A\mathbf{v}^t = \lambda\mathbf{0}^t = \mathbf{0}^t$.

Se $rg(A) = r$, allora il sistema $AX = \mathbf{0}^t$ ammette ∞^{n-r} soluzioni. Pertanto la sua generica soluzione presenterà $n-r$ parametri indipendenti e quindi $\dim(\mathcal{S}_0) = n - r$. □

Sia $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Allora mostreremo che ogni sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare omogeneo.

Teorema 5.9. *Sia U un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ tale che $\dim(U) = n - r$. Allora esiste un sistema lineare omogeneo di r equazioni in n incognite a coefficienti in $\mathbb{R}$ tale che l'insieme delle sue soluzioni coincide con U.*

Dimostrazione. Si consideri $U^\perp$, il complemento ortogonale di U rispetto al prodotto interno standard di $\mathbb{R}^n$. Se $\dim(U) = n - r$, allora $\dim(U^\perp) = r$. Sia

$$\mathbf{v}_1 = (a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}), \mathbf{v}_2 = (a_{21}, a_{22}, \ldots, a_{2n}), \ldots, \mathbf{v}_r = (a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{rn})$$

una base di $U^\perp$. Allora i vettori di U sono tutte e sole le soluzioni del sistema omogeneo

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}X_1 + a_{r2}X_2 + \ldots + a_{rn}X_n = 0 \end{cases}.$$

□

6 Spazi affini

Sia $\mathbb{K}$ un campo e sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale.

Si definisce *spazio affine* (su V o associato a V) un insieme non–vuoto $\mathbf{A}$, i cui elementi sono detti *punti*, per cui esiste un'applicazione

$$(P, Q) \in \mathbf{A} \times \mathbf{A} \longmapsto \overrightarrow{PQ} \in V$$

tale che

1) per ogni punto $P \in \mathbf{A}$ e per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ esiste un unico punto $Q \in \mathbf{A}$ tale che $\overrightarrow{PQ} = \mathbf{v}$,

2) per ogni terna $P, Q, R \in \mathbf{A}$ si ha $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$.

Proposizione 6.1. *i) Fissato $P \in \mathbf{A}$, l'applicazione*

$$Q \in \mathbf{A} \longmapsto \overrightarrow{PQ} \in V$$

è una biezione.

ii) Per ogni coppia di punti $P, Q \in \mathbf{A}$ si ha $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$, $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$.

Dimostrazione. i) Sia $\mathbf{v} \in V$. Dalla definizione di spazio affine esiste un punto $X \in \mathbf{A}$ tale che $\overrightarrow{PX} = \mathbf{v}$. Pertanto l'applicazione è suriettiva. D'altro canto, se esistessero $X, Y \in \mathbf{A}$ tali che $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{PY} = \mathbf{v}$, allora avremmo $X = Y$, dalla definizione di spazio affine. Pertanto l'applicazione è anche iniettiva.

ii) Dalla *2)*, scelti $Q = R = P$, si ha che $\overrightarrow{PP} = \overrightarrow{PP} + \overrightarrow{PP}$. Pertanto $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0}$. D'altro canto $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{PP}$, da cui segue $\overrightarrow{PQ} = -\overrightarrow{QP}$. □

$\overrightarrow{PQ}$ è detto *vettore di punto iniziale P e punto finale Q*. La dimensione di V è detta *dimensione dello spazio affine* $\mathbf{A}$ e si denota con $\dim(\mathbf{A})$.

Esempi 6.2. 1. Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale, allora ponendo $\mathbf{A} = V$ e considerando l'applicazione

$$(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \in V \times V \longmapsto \mathbf{w} - \mathbf{v} \in V$$

viene definito uno spazio affine (su V). Infatti, per ogni punto $\mathbf{p} \in V$ e per ogni vettore $\mathbf{v} \in V$, vi è un unico punto $\mathbf{q} \in V$ tale che $\mathbf{q} - \mathbf{p} = \mathbf{v}$, che è $\mathbf{q} = \mathbf{v} + \mathbf{p}$. Inoltre, per ogni terna $\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r} \in V$, si ha che $(\mathbf{q} - \mathbf{p}) + (\mathbf{r} - \mathbf{q}) = \mathbf{r} - \mathbf{p}$. Quindi V definisce uno spazio affine su se stesso.

2. Un caso particolare dell'esempio precedente si ottiene considerando $V = \mathbb{K}^n$. In tal caso lo spazio affine su se stesso definito da $\mathbb{K}^n$ si chiama *spazio affine n–dimensionale su $\mathbb{K}$ e lo si denota con $\mathbf{A}^n(\mathbb{K})$.*

Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale tale che $\dim(V) = n$ e sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine su V. Un *sistema di riferimento affine* di $\mathbf{A}$ è una coppia $\mathcal{R} = (O, \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\})$, dove O è un punto di $\mathbf{A}$, detto *origine del riferimento* $\mathcal{R}$ e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di V.

Osservazione 6.3. *i)* Fissato un sistema di riferimento $\mathcal{R}$ di uno spazio affine $\mathbf{A}$ su V, per ogni punto $P \in \mathbf{A}$, esiste un'unica n–upla $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tale che $\overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$. In particolare $(x_1, \dots, x_n)$ si dice *n–upla delle coordinate di P rispetto ad $\mathcal{R}$*. Poichè $\overrightarrow{OO} = \mathbf{0}$, l'origine O ha $(0, \dots, 0)$ quale n–upla delle coordinate.

ii) Se $(a_1, \dots, a_n)$ è la n–upla delle coordinate del punto A e $(b_1, \dots, b_n)$ è la n–upla delle coordinate del punto B rispetto ad $\mathcal{R}$, allora

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (b_1 - a_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (b_n - a_n)\mathbf{e}_n.$$

Pertanto la n–upla delle componenti del vettore $\overrightarrow{AB} \in V$ rispetto alla base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ risulta $(b_1 - a_1, \dots, b_n - a_n)$.

iii) Dalla Proposizione 6.1, *i)*, esistono $P_1, \dots, P_n \in \mathbf{A}$ tali che $\overrightarrow{OP_i} = \mathbf{e}_i$, $1 \le i \le n$. Pertanto un sistema di riferimento affine si può definire in maniera equivalente come una $(n+1)$–upla di punti $(O, P_1, \dots, P_n)$ tali che $\overrightarrow{OP_1}, \overrightarrow{OP_2}, \dots, \overrightarrow{OP_n}$ è una base di V.

Da ora in avanti considereremo soltanto $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ lo spazio affine n–dimensionale su $\mathbb{R}$.

6.1 Sottospazi affini

Sia $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ lo spazio affine n–dimensionale su $\mathbb{R}$. Siano P un punto di $\mathbf{A}$ e W un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$. Si definisce *sottospazio affine passante per P e parallelo a W* il sottoinsieme $\mathbf{S} \subseteq \mathbf{A}$ costituito da tutti i punti $Q \in \mathbf{A}$ tali che $\overrightarrow{PQ} \in W$.

$$\begin{aligned}\mathbf{S} &= \{Q \in \mathbf{A}^n(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{PQ} \in W\} = \\ &= \{Q \in \mathbf{A}^n(\mathbb{R}) \mid \exists\, \mathbf{w} \in W, Q - P = \mathbf{w}\} = \{P + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W\}.\end{aligned}$$

Si noti che $P \in \mathbf{S}$, poichè $\overrightarrow{PP} = \mathbf{0} \in W$. Il sottospazio W si dice *giacitura di* $\mathbf{S}$. La dimensione di W è detta *dimensione di* $\mathbf{S}$ e si denota con $\dim(\mathbf{S})$.

Un sottospazio affine $\mathbf{S}$ avente dimensione $0, 1, 2, 3, n-1$ si dice *punto, retta, piano, solido, iperpiano di* $\mathbf{A}$, rispettivamente.

Se $\mathbf{S}$ è una retta e W è la sua giacitura, allora W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione 1. In tal caso se $\mathbf{0} \neq \mathbf{w} \in W$, allora $W = \langle \mathbf{w} \rangle$ ed il vettore $\mathbf{w}$ si dice *vettore direttore di* $\mathbf{S}$.

Proposizione 6.4. *i) Un sottospazio affine è determinato dalla sua giacitura e da uno qualsiasi dei suoi punti.*

ii) Se $\mathbf{S}$ *un sottospazio affine di* $\mathbf{A}$ *avente giacitura* W*, allora* $\mathbf{S}$ *è uno spazio affine su* W*.*

iii) Per due punti distinti di $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ *passa un'unica retta*

Dimostrazione. i) Sia $\mathbf{S}$ il sottospazio affine di $\mathbf{A}$ passante per Q ed avente giacitura W. Sia M un punto di $\mathbf{S}$ e sia $\mathbf{S}'$ il sottospazio affine passante per M ed avente giacitura W. Mostriamo che $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$. Infatti, se $P \in \mathbf{S}$, allora

$$\overrightarrow{MP} = \overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{QP} = -\overrightarrow{QM} + \overrightarrow{QP},$$

dove $\overrightarrow{QM}, \overrightarrow{QP} \in W$. Quindi $\overrightarrow{MP} \in W$ e $P \in \mathbf{S}'$. D'altro canto, se $P \in \mathbf{S}'$, allora

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QM} + \overrightarrow{MP} = -\overrightarrow{MQ} + \overrightarrow{MP},$$

dove $\overrightarrow{MQ}, \overrightarrow{MP} \in W$. Quindi $\overrightarrow{QP} \in W$ e $P \in \mathbf{S}$.

ii) Sia $\mathbf{S}$ il sottospazio affine passante per P ed avente giacitura W. Allora il punto P appartiene ad $\mathbf{S}$, in quanto $\mathbf{0} = \overrightarrow{PP} \in W$ e quindi $\mathbf{S}$ non è vuoto. Si consideri l'applicazione

$$(P, Q) \in \mathbf{S} \times \mathbf{S} \longmapsto \overrightarrow{PQ} \in W$$

si ha che le proprietà *1), 2)* sono entrambe verificate e quindi $\mathbf{S}$ è uno spazio affine su W.

iii) Sia $W = \langle \overrightarrow{PQ} \rangle$. Allora W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione 1. Sia $\mathbf{S} = \{P + \mathbf{w} \mid \mathbf{w} \in W\}$. Allora $\mathbf{S}$ è una retta che contiene P (in quanto $\mathbf{0} \in W$) e Q (in quanto $Q - P \in W$). Inoltre dalla *i)*, la retta $\mathbf{S}$ è determinata univocamente da P e da W. □

Esercizi 6.5.

1. Si determini il sottospazio affine $\mathbf{S}$ di $\mathbf{A}^3(\mathbb{R})$ passante per $P = (1, 2, 3)$ e parallelo al sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$, dove $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$.

   $\mathbf{S} = \{Q \in \mathbf{A}^3(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{PQ} \in W\} = \{Q = (a, b, c) \in \mathbf{A}^3(\mathbb{R}) \mid Q - P = (1 - a, 2 - b, 3 - c) \in W\} = \{(a, b, c) \in \mathbf{A}^3(\mathbb{R}) \mid a + b + c = 6\}$. Si noti che $\dim(W) = 2$, quindi $\mathbf{S}$ è un piano.

2. Si determini il sottospazio affine $\mathbf{S}$ di $\mathbf{A}^3(\mathbb{R})$ passante per $P = (1, 2, 3)$ e parallelo al sottospazio vettoriale W di $\mathbb{R}^3$, dove $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y = y + z = 0\}$.

   $\mathbf{S} = \{Q \in \mathbf{A}^3(\mathbb{R}) \mid \overrightarrow{PQ} \in W\} = \{P = (a, b, c) \in \mathbf{A}^3(\mathbb{R}) \mid Q - P = (1 - a, 2 - b, 3 - c) \in W\} = \{(a, b, c) \in \mathbf{A}^3(\mathbb{R}) \mid a + b = 3, b + c = 5\}$. Si noti che $\dim(W) = 1$, quindi $\mathbf{S}$ è una retta.

Siano $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{S}'$ due sottospazi affini aventi giacitura W e W', rispettivamente. Allora $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{S}'$ si definiscono

disgiunti se $\mathbf{S} \cap \mathbf{S}' = \emptyset$;

paralleli se $W \subseteq W'$ oppure $W' \subseteq W$.

Osservazione 6.6. Due rette sono parallele se e solo se i loro vettori direttori sono proporzionali.

Dalla Proposizione 6.4, *i)*, si ha quanto segue.

Corollario 6.7. *Siano* $\mathbf{S}$ *ed* $\mathbf{S}'$ *due sottospazi affini paralleli, allora* $\mathbf{S}$ *ed* $\mathbf{S}'$ *sono disgiunti oppure* $\mathbf{S} = \mathbf{S}'$.

6.1.1 Rappresentazione parametrica di un sottospazio affine

Sia $\mathbf{S}$ il sottospazio affine di $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ passante per $P = (x_1, \ldots, x_n)$ e parallelo a W, con $\dim(\mathbf{S}) = s$. Sia $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_s\}$ una base di W, dove $\mathbf{w}_i = (z_{i1}, z_{i2}, \ldots, z_{in})$, $1 \leq i \leq s$. Allora $\forall\, Q = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{S}$, $\overrightarrow{PQ} \in W$ e pertanto esistono $t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n) = t_1\mathbf{w}_1 + \ldots + t_s\mathbf{w}_s.$$

Quindi

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + t_1 z_{11} + t_2 z_{21} + \cdots + t_s z_{s1} \\ y_2 = x_2 + t_1 z_{12} + t_2 z_{22} + \cdots + t_s z_{s2} \\ \qquad\vdots \\ y_n = x_n + t_1 z_{1n} + t_2 z_{2n} + \cdots + t_s z_{sn} \end{cases}, \quad t_1, t_2, \ldots, t_s \in \mathbb{R}. \tag{6.1}$$

Al variare di $t_1, \ldots, t_s \in \mathbb{R}$, le equazioni (6.1) forniscono tutti i punti di $\mathbf{S}$ e sono dette *equazioni parametriche di* $\mathbf{S}$.

Osservazione 6.8. Si noti che le equazioni parametriche di un sottospazio affine $\mathbf{S}$ non sono univocamente determinate da $\mathbf{S}$, ma dipendono dalla scelta di P e della base di W.

Esempi 6.9.

1. Sia $\mathbf{S}$ la retta del piano affine $\mathbf{A}^2(\mathbb{R})$ passante per $P = (x_0, y_0)$ e parallela a $W = \langle (l, m) \rangle$. Allora le equazioni parametriche di $\mathbf{S}$ risultano

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il vettore (l, m) è un vettore direttore di $\mathbf{S}$.

2. Sia $\mathbf{S}$ la retta dello spazio affine $\mathbf{A}^3(\mathbb{R})$ passante per $P = (x_0, y_0, z_0)$ e parallela a $W = \langle (l, m, r) \rangle$. Allora le equazioni parametriche di $\mathbf{S}$ risultano

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l \\ y = y_0 + \lambda m \\ z = z_0 + \lambda r \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Il vettore (l, m, r) è un vettore direttore di $\mathbf{S}$.

3. Sia $\mathbf{S}$ il piano dello spazio affine $\mathbf{A}^3(\mathbb{R})$ passante per $P = (x_0, y_0, z_0)$ e parallelo a $W = \langle (l, m, r), (l', m', r') \rangle$. Allora le equazioni parametriche di $\mathbf{S}$ risultano

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda l + \mu l' \\ y = y_0 + \lambda m + \mu m' \\ z = z_0 + \lambda r + \mu r' \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

4. Sia $\mathbf{S}$ il piano dello spazio affine $\mathbf{A}^4(\mathbb{R})$ passante per $P = (1, 2, 3, 4)$ e parallelo a $W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y = x + z - t = 0\}$. W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^4$ di dimensione 2 ed una sua base è $\{(-1, 1, 1, 0), (1, -1, 0, 1)\}$. Allora le equazioni parametriche di $\mathbf{S}$ risultano

$$\begin{cases} x = 1 - \lambda + \mu \\ y = 2 + \lambda - \mu \\ z = 3 + \lambda \\ t = 4 + \mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

6.1.2 Rappresentazione cartesiana di un sottospazio affine

Si consideri un sistema lineare di m equazioni nelle n indeterminate $X_1, \ldots, X_n$ a coefficienti in $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \ldots + a_{mn}X_n = b_m \end{cases}.$$

Sia $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{R})$ la matrice associata al sistema, allora in forma matriciale tale sistema risulta

$$AX = \boldsymbol{b}.$$

Il prossimo risultato mostra che l'insieme delle soluzioni forma un sottospazio affine di $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$.

Proposizione 6.10. *Sia $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ l'insieme delle soluzioni del sistema lineare $AX = \boldsymbol{b}$. Allora $\mathcal{S}$ è uno sottospazio affine di $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ e $\dim(\mathcal{S}) = n - r$, dove $r = rg(A)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathbb{R}^n$ l'insieme delle soluzioni del sistema omogeneo associato $AX = \mathbf{0}$ e sia P una soluzione particolare del sistema $AX = \boldsymbol{b}$, quindi $P \in \mathcal{S}$. Dalla Proposizione 5.8, $\mathcal{S}_0$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ di dimensione $n-r$, dove $r = rg(A)$. Inoltre dalla Proposizione 5.1, gli elementi di $\mathcal{S}_0$ sono tutti e soli i punti di $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ che si ottengono sommando a P gli elementi di $\mathcal{S}_0$. Allora i punti di $\mathcal{S}$ danno luogo al sottospazio affine passante per P e parallelo ad $\mathcal{S}_0$. $\square$

Viceversa mostreremo che ogni sottospazio affine di $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ è l'insieme delle soluzioni di un sistema lineare.

Teorema 6.11. *Sia* $\mathbf{S}$ *un sottospazio affine di* $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ *tale che* $\dim(\mathbf{S}) = n - r$. *Allora esiste un sistema lineare omogeneo di* r *equazioni in* n *incognite a coefficienti in* $\mathbb{R}$ *tale che l'insieme delle sue soluzioni coincide con* $\mathbf{S}$.

Dimostrazione. Sia $\mathbf{S}$ il sottospazio affine di $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ passante per $P = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ e parallelo a W. Quindi W è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ avente dimensione $n - r$. Dal Teorema 5.9 esiste un sistema lineare omogeneo di r equazioni in n incognite a coefficienti in $\mathbb{R}$ tale che l'insieme delle sue soluzioni coincide con W.

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = 0 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = 0 \\ \vdots \\ a_{r1}X_1 + a_{r2}X_2 + \ldots + a_{rn}X_n = 0 \end{cases}.$$

Siano $b_j \in \mathbb{R}$ tali che

$$a_{j1}x_1 + \cdots + a_{jn}x_n = b_j, \;\; 1 \leq j \leq r.$$

Allora i punti di $\mathbf{S}$ sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \ldots + a_{1n}X_n = b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \ldots + a_{2n}X_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{r1}X_1 + a_{r2}X_2 + \ldots + a_{rn}X_n = b_r \end{cases}. \tag{6.2}$$

Infatti, $\forall\, Q = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{A}^n(\mathbb{R})$, il punto Q appartiene ad $\mathbf{S}$ se e solo se $\overrightarrow{PQ} = (y_1 - x_1, \ldots, y_n - x_n) \in W$, da cui si ha necessariamente che

$$a_{j1}y_1 + \cdots + a_{jn}y_n = b_j, \;\; 1 \leq j \leq r.$$

□

Le equazioni (6.2) si dicono *equazioni cartesiane* del sottospazio affine $\mathbf{S}$.

Osservazione 6.12. *i)* Le equazioni cartesiane di un sottospazio affine non sono univocamente determinate, infatti sistemi lineari equivalenti definiscono lo stesso sottospazio affine.

ii) I punti di sottospazio affine di $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ formano un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se le sue equazioni cartesiane sono omogenee. In altri termini un sottospazio affine di $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ è uno spazio vettoriale di $\mathbb{R}^n$ se e solo se passa per l'origine.

Esempi 6.13. 1. Equazione cartesiana di una retta nel piano affine $\mathbf{A}^2(\mathbb{R})$:

$$a_1X_1 + a_2X_2 = b, \;\; (a_1, a_2) \neq (0, 0).$$

2. Equazione cartesiana di un piano nello spazio affine $\mathbf{A}^3(\mathbb{R})$:

$$a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = b, \quad (a_1, a_2, a_3) \neq (0, 0, 0),$$

equazione cartesiana di una retta nello spazio affine $\mathbf{A}^3(\mathbb{R})$:

$$\begin{cases} a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 = b_1 \\ a_1'X_1 + a_2'X_2 + a_3'X_3 = b_2 \end{cases}, \quad rg \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1' & a_2' & a_3' \end{pmatrix} = 2.$$

3. Equazione cartesiana di un iperpiano nello spazio affine $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$:

$$a_1X_1 + \ldots + a_nX_n = b, \quad (a_1, \ldots, a_2) \neq (0, \ldots, 0).$$

Esercizi 6.14. 1. In $\mathbf{A}^3(\mathbb{R})$, si considerino i punti $A = (-2, 1, 0)$, $B = (-3, 1, -2)$, $C = (3, 0, 2)$. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane del piano π contenente A, B, C.

Sia W la giacitura di π, allora $\overrightarrow{AB} = (-1, 0, 2), \overrightarrow{AC} = (5, -1, 2) \in W$. Inoltre $\dim(W) = 2$ e $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\}$ è una base di W. Poichè π è il piano di $\mathbf{A}^3(\mathbb{R})$ passante per A e parallelo a W, un punto $Q = (x, y, z)$ appartiene a π se e solo se $\exists\, \mathbf{w} \in W$ tale che $Q = A + \mathbf{w}$ e quindi esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che $Q = (x, y, z) = (-2, 1, 0) + \lambda(-1, 0, -2) + \mu(5, -1, 2)$. Pertanto, le equazioni parametriche di π risultano:

$$\begin{cases} x = -2 - \lambda + 5\mu \\ y = 1 - \mu \\ z = -2\lambda + 2\mu \end{cases}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $W^\perp = \{(2a, 8a, -a) \mid a \in \mathbb{R}\} = \langle(2, 8, -1)\rangle$. Quindi $W \subset \mathbb{R}^3$ è l'insieme delle soluzioni di

$$2X_1 + 8X_2 - X_3 = 0$$

e l'equazione cartesiana di π risulta:

$$2X_1 + 8X_2 - X_3 = 4.$$

2. In $\mathbf{A}^3(\mathbb{R})$, dati il punto $A = (2, 4, -3)$ ed il sottospazio vettoriale $W = \langle(1, -5, 4)\rangle$ di $\mathbb{R}^3$, si determinino le equazioni parametriche e cartesiane della retta ℓ per A e parallela a W.

Le equazioni parametriche di ℓ risultano:

$$\begin{cases} x = 2 + \lambda \\ y = 4 - 5\lambda \\ z = -3 + 4\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Inoltre $W^\perp = \langle(5, 1, 0), (4, 0, -1)\rangle$. Quindi $W \subset \mathbb{R}^3$ è l'insieme delle soluzioni di

$$\begin{cases} 5x + y = 0 \\ 4x - z = 0 \end{cases}$$

e le equazioni cartesiane di ℓ risultano:

$$\begin{cases} 5x + y = 14 \\ 4x - z = 11 \end{cases}.$$

7 Spazi euclidei reali

Sia V un $\mathbb{R}$–spazio vettoriale e sia $\mathbf{A}$ uno spazio affine su V. Allora $\mathbf{A}$ si definisce *spazio euclideo* se V è uno spazio vettoriale euclideo. Poichè $\mathbb{R}^n$ è uno spazio vettoriale euclideo, in quanto dotato di prodotto scalare, si ha che $\mathbf{A}^n(\mathbb{R})$ è uno spazio euclideo che denoteremo con $\mathbf{E}^n$.

Un *riferimento di coordinate cartesiane* (o *riferimento cartesiano*) dello spazio euclideo reale $\mathbf{E}^n$ è una coppia $\mathcal{R} = (O, \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\})$, dove O è un punto arbitrario di $\mathbf{E}^n$, detto *origine del riferimento* $\mathcal{R}$, e $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$. Se $P \in \mathbf{E}^n$ è tale che $\overrightarrow{OP} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, allora $(x_1, \ldots, x_n)$ è si dicono *coordinate cartesiane* di P rispetto ad $\mathcal{R}$.

Siano P, Q due punti di $\mathbf{E}^n$. Si definisce *distanza euclidea tra* P *e* Q e si denota con $d(P, Q)$ la quantità:

$$d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||.$$

Pertanto, fissato un riferimento cartesiano $\mathcal{R}$, se $P = (x_1, \ldots, x_n)$, $Q = (y_1, \ldots, y_n)$ sono le coordinate cartesiane di P, Q rispetto ad $\mathcal{R}$, si ha che

$$\begin{aligned} d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}|| = \sqrt{(y_1 - x_1, \ldots, y_m - x_n)} = \\ = \sqrt{(y_1 - x_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (y_n - x_n)\mathbf{e}_n} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \ldots + (y_n - x_n)^2}. \end{aligned}$$

Più in generale, se $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}'$ sono due sottospazi affini, allora si definisce *distanza euclidea* tra $\mathbf{S}$ ed $\mathbf{S}'$ la quantità

$$d(\mathbf{S}, \mathbf{S}') = \min\{d(P, Q) \ \mid \ P \in \mathbf{S}, Q \in \mathbf{S}'\}.$$

I punti $P_0 \in \mathbf{S}$ e $Q_0 \in \mathbf{S}'$ tale che $d(\mathbf{S}, \mathbf{S}') = d(P_0, Q_0)$ si definiscono *punti di minima distanza.*

Proposizione 7.1. *Siano* $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}'$ *sono due sottospazi affini aventi giacitura* W, W'*, rispettivamente e siano* $P_0 \in \mathbf{S}$, $Q_0 \in \mathbf{S}'$ *punti di minima distanza. Allora* $\overrightarrow{P_0Q_0} \in W^\perp \cap W'^\perp$*.*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{S}$ il sottospazio affine di $\mathbf{E}^n$ passante per R ed avente giacitura W. Si noti che se $P \in \mathbf{S}'$, allora $d(P, Q_0) = ||\overrightarrow{PQ_0}|| \leq d(P, Q) = ||\overrightarrow{PQ}||$, $\forall\, Q \in \mathbf{S}$. In particolare $||\overrightarrow{PQ}|| = ||\overrightarrow{PR} + \overrightarrow{RQ}|| = ||\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{QR}|| = ||\mathbf{v} - \mathbf{w}||$, dove $\mathbf{v} = \overrightarrow{PR} \in \mathbb{R}^n$ e $\mathbf{w} = \overrightarrow{QR} \in W$. D'altro canto dal Teorema 3.10, si ha che $||\mathbf{v} - \mathbf{w}|| \geq ||\mathbf{v} - \mathbf{v}_W||$, $\forall\, \mathbf{w} \in W$. Quindi Q_0 è il punto di $\mathbf{S}$ tale che $\overrightarrow{Q_0R} = \mathbf{v}_W$ e $PQ_0 = \mathbf{v} - \mathbf{v}_W \in W^\perp$.

Analogamente si dimostra che se $Q \in S$, allora $QP_0 \in W'^\perp$ e quindi $\overrightarrow{P_0Q_0} \in W^\perp \cap W'^\perp$. □

Siano ℓ, ℓ' due rette di $\mathbf{E}^n$ aventi vettori direttori $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$, rispettivamente. Si definisce *angolo (convesso)* tra le rette ℓ_1, ℓ_2, l'angolo (convesso) θ tra i vettori $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$, dove

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}'}{||\mathbf{v}|| \ \ ||\mathbf{v}'||}.$$

Si definiscono *assi cartesiani* le rette passanti per l'origine O ed aventi come vettore direttore i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$, rispettivamente.

Sia ℓ una retta di $\mathbf{E}^n$ avente vettore direttore $\mathbf{v} = v_1\mathbf{e}_1 + \ldots + v_n\mathbf{e}_n$. Si definiscono *coseni direttori* di ℓ, i coseni degli angoli tra la retta ℓ e gli assi cartesiani. Pertanto i coseni direttori di ℓ risultano

$$\left(\frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_1}{||\mathbf{v}||}, \ldots, \frac{\mathbf{v}\cdot\mathbf{e}_n}{||\mathbf{v}||}\right) = \left(\frac{v_1}{\sqrt{v_1^2+\ldots+v_n^2}}, \ldots, \frac{v_n}{\sqrt{v_1^2+\ldots+v_n^2}}\right)$$

Due sottospazi affini $\mathbf{S}$, $\mathbf{S}'$ di $\mathbf{E}^n$ aventi giacitura W, W', rispettivamente, si definiscono *ortogonali* se $W \subseteq W'^{\perp}$ oppure $W' \subseteq W^{\perp}$.

Per semplicità, da ora in avanti considereremo come base ortonormale $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^n$ e come prodotto scalare il prodotto interno standard.

7.1 Il piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$

Sia $\mathcal{R} = (O, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\})$ un riferimento di coordinate cartesiane del piano euclideo reale $\mathbf{E}^2$ è.

Sia ℓ la retta di $\mathbf{E}^2$ individuata da due punti distinti $A, B \in \mathbf{E}^2$ di coordinate cartesiane $A = (x_0, y_0)$, $B = (x_1, y_1)$. Indichiamo con $\overrightarrow{\ell}$ la giacitura di ℓ. Allora $\overrightarrow{\ell} = \langle\overrightarrow{AB}\rangle$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^2$ di dimensione 1 ed il vettore $\overrightarrow{AB}$ è una sua base. Per ogni punto $P \in \ell$ i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ sono linearmente dipendenti, quindi esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB}.$$

Pertanto, indicate con (x, y) le coordinate cartesiane del generico punto $P \in \ell$, si ha che

$$\overrightarrow{AP} = (x - x_0, y - y_0) = \lambda(x_1 - x_0, y_1 - y_0)$$

e quindi

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0) \\ y - y_0 = \lambda(y_1 - y_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7.1}$$

Le equazioni (7.1) sono le equazioni parametriche della retta $\ell = AB$.
Si noti che poichè i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ sono linearmente dipendenti si ha che

$$rg\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \end{pmatrix} = 1,$$

quindi

$$rg\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

in quanto

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & 0 \end{pmatrix} = -\det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 \\ x_1-x_0 & y_1-y_0 \end{pmatrix} = 0$$

ed almeno uno tra

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & 1 \end{pmatrix}$$

è non nullo. Quindi

$$\det\begin{pmatrix} x & y & 1 \\ x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima riga si ottiene una equazione lineare nelle indeterminate x, y del tipo

$$ax + by + c = 0, \tag{7.2}$$

dove a, b non sono entrambi nulli. L'equazione (7.2) è l'equazione cartesiana della retta $\ell = AB$.

Sia ℓ la retta di equazione cartesiana $ax + by + c = 0$, con $(a, b) \neq (0, 0)$. Allora l'equazione $ax + by = 0$ si dice *equazione cartesiana della giacitura* $\overrightarrow{\ell}$. Infatti un vettore direttore di ℓ è soluzione dell'equazione cartesiana della giacitura $\overrightarrow{\ell}$. In particolare $(b, -a)$ è un vettore direttore di ℓ e $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ è ortogonale a $\overrightarrow{\ell}$.

Sia P_0 il punto di coordinate cartesiane (x_0, y_0). L'unica retta ℓ' passante per P_0 e parallela ad ℓ ha equazione cartesiana

$$ax + by - ax_0 - by_0 = 0.$$

Infatti $P_0 \in \ell'$ ed i vettori direttori di ℓ ed ℓ' sono proporzionali. Le equazioni parametriche di ℓ' risultano:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda b \\ y = y_0 - \lambda a \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

L'unica retta ℓ'' passante per P_0 e perpendicolare ad ℓ ha equazione cartesiana

$$bx - ay - bx_0 + ay_0 = 0.$$

Infatti $P_0 \in \ell''$ ed i coefficienti direttori di ℓ ed ℓ'' sono ortogonali. Le equazioni parametriche di ℓ'' risultano:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7.3}$$

Sia $P_1 = (x_1, y_1)$ l'unico punto in comune tra ℓ ed ℓ''. Si definisce *distanza tra il punto* P_0 *e la retta* ℓ e si denota con $d(P_0, \ell)$, la distanza euclidea tra P_0 e P_1.

Poichè $\overrightarrow{P_1P_0} \in \overrightarrow{\ell''}$, esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda(a, b)$. Ne segue che

$$d(P_0, \ell) = d(P_0, P_1) = ||\overrightarrow{P_1P_0}|| = ||(\lambda a, \lambda b)|| = |\lambda|\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Inoltre $x_0 - x_1 = \lambda a$ e $y_0 - y_1 = \lambda b$, da cui si ottiene $x_1 = x_0 - \lambda a$ e $y_1 = y_0 - \lambda b$. Poichè $P_1 \in \ell$ si ha che

$$a(x_0 - \lambda a) + b(y_0 - \lambda b) + c = 0$$

e quindi

$$\lambda = \frac{ax_0 + by_0 + c}{a^2 + b^2}.$$

Pertanto

$$d(P_0, \ell) = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}.$$

Analogamente se ℓ, ℓ' sono rette parallele, allora si definisce *distanza tra le rette* ℓ *ed* ℓ' e si denota con $d(\ell, \ell')$, la distanza tra P ed ℓ', dove P è un qualsiasi punto di ℓ.

7.1.1 Posizione reciproca di due rette in $\mathbf{E}^2$

Siano ℓ, ℓ' due rette del piano euclideo $\mathbf{E}^2$ aventi equazioni cartesiane $\ell : ax + by + c = 0$ e $\ell' : a'x + b'y + c' = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$ e $(a', b') \neq (0, 0)$. La loro intersezione $\ell \cap \ell'$ è rappresentata dal sistema lineare:

$$\begin{cases} ax + by = -c \\ a'x + b'y = -c' \end{cases},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & -c \\ a' & b' & -c' \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente la matrice incompleta e completa associata al sistema. Si noti che $1 \leq rg(A) \leq 2$, vi sono pertanto tre possibilità:

1) $rg(\bar{A}) = 1$ (e quindi $rg(A) = 1$). In tal caso le rette ℓ, ℓ' coincidono.

2) $rg(A) = 1$ e $rg(\bar{A}) = 2$. In tal caso le rette ℓ e ℓ' sono parallele e disgiunte.

3) $rg(A) = 2$ (e quindi $rg(\bar{A}) = 2$). In tal caso le rette ℓ e ℓ' sono incidenti ed hanno un unico punto P_0 in comune. Da Cramer P_0 ha coordinate cartesiane $\left(\frac{bc'-cb'}{ab'-a'b}, \frac{ca'-ac'}{ab'-a'b}\right)$.

Si definisce *fascio proprio* di rette l'insieme di tutte le rette di $\mathbf{E}^2$ che passano per uno stesso punto P_0, detto il *centro del fascio*.

Teorema 7.2. *Siano* $\ell : ax+by+c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $\ell' : a'x+b'y+c' = 0$, $(a', b') \neq (0, 0)$, *due rette distinte di un fascio proprio. Allora tutte e sole le rette di tale fascio hanno un'equazione del tipo* $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$, *con* $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Dimostrazione. Sia $P_0 = (x_0, y_0)$ l'unico punto in comune tra ℓ ed ℓ' e siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ non entrambi nulli. Allora $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$ rappresenta l'equazione cartesiana di una retta r. Infatti $(\lambda a + \mu a', \lambda b + \mu b') \neq (0, 0)$, altrimenti se

$$\begin{cases} \lambda a + \mu a' = 0 \\ \lambda b + \mu b' = 0 \end{cases}$$

avremmo che $rg\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} = 1$ e le due rette ℓ, ℓ' risulterebbero parallele, contro le ipotesi. Inoltre, poichè $\lambda(ax_0 + by_0 + c) + \mu(a'x_0 + b'y_0 + c') = \lambda 0 + \mu 0 = 0$, si ha che $P_0 \in r$.

Viceversa, se r è una qualsiasi retta passante per P_0 e se $Q = (x_1, y_1)$ è un punto di r distinto da P_0, allora se $\lambda = a'x_1 + b'y_1 + c'$ e $\mu = -(ax_1 + by_1 + c)$, si ha che l'equazione cartesiana della retta $r = P_0Q$ è data da $\lambda(ax + by + c) + \mu(a'x + b'y + c') = 0$. $\square$

Si definisce *fascio improprio* di rette l'insieme di tutte le rette di $\mathbf{E}^2$ parallele ad una stessa retta. Analogamente al Teorema 7.2, valgono i seguenti risultati.

Teorema 7.3. *Sia $\ell : ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, una retta di un fascio improprio. Allora tutte e sole le rette di tale fascio hanno un'equazione del tipo $ax + by + \lambda = 0$, con $\lambda \in \mathbb{R}$.*

Teorema 7.4. *Tre rette distinte $\ell : ax + by + c = 0$, $(a, b) \neq (0, 0)$, $\ell' : a'x + b'y + c' = 0$, $(a', b') \neq (0, 0)$, $\ell'' : a''x + b''y + c'' = 0$, $(a'', b'') \neq (0, 0)$, appartengono ad uno stesso fascio (proprio oppure improprio) se e solo se*

$$\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{pmatrix} = 0.$$

Esercizi 7.5.

1. Determinare le equazioni parametriche e cartesiane della retta r passante per $A = (5, -2)$ e parallela ad $\ell : 2x - 3y + 4 = 0$ e della retta s passante per $B = (7, 7)$ e perpendicolare ad ℓ.

   $r : 2x - 3y - 16 = 0$, $s : 3x + 2y - 35 = 0$.

2. Determinare la distanza tra il punto $A = (5, -4)$ e la retta $\ell : 2x + 3y - 5 = 0$.

   $d(A, \ell) = \frac{7}{\sqrt{13}}$.

3. Si consideri il punto $A = (3, 2)$ e le retta $\ell : 3x + y - 2 = 0$.

   - Determinare i punti di ℓ a distanza $\sqrt{13}$ da A.

     $$\ell : \begin{cases} x = \lambda \\ y = 2 - 3\lambda \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}.$$

     Sia $P = (\lambda, 2 - 3\lambda) \in \ell$. Se $d(A, P) = \sqrt{(\lambda - 3)^2 + (3\lambda)^2} = \sqrt{13}$, allora $5\lambda^2 - 3\lambda - 2 = 0$ e $\lambda \in \left\{-\frac{2}{5}, 1\right\}$. Pertanto $P \in \left\{\left(-\frac{2}{5}, \frac{16}{5}\right), (1, -1)\right\}$.

   - Determinare $d(A, \ell)$, la retta r per A ed ortogonale ad ℓ e $r \cap \ell$.
     $d(A, \ell) = \frac{|9+2-2|}{\sqrt{9+1}} = \frac{9}{\sqrt{10}}$; $r : x - 3y + 3 = 0$; $r \cap \ell = \left\{\left(\frac{3}{10}, \frac{11}{10}\right)\right\}$.

4. Si consideri il punto $A = (3, 1)$ e le rette $\ell : \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = -1 + 3\lambda \end{cases}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ ed ℓ' : $-4x + y + 3 = 0$.

- Determinare la retta r per A e parallela ad ℓ.

  $r : 3x - 2y - 7 = 0$.
- Determinare la retta r' per A e parallela ad ℓ'.

  $r' : 4x - y - 11 = 0$.

7.2 Lo spazio euclideo reale $\mathbf{E}^3$

Sia $\mathcal{R} = (O, \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\})$ un *riferimento di coordinate cartesiane* dello spazio euclideo reale $\mathbf{E}^3$.

Sia σ il piano di $\mathbf{E}^3$ individuato dai tre punti distinti non allineati $A, B, C \in \mathbf{E}^3$ di coordinate cartesiane $A = (x_0, y_0, z_0)$, $B = (x_1, y_1, z_1), C = (x_2, y_2, z_2)$. Sia $\overrightarrow{\sigma}$ la giacitura di σ. Allora $\overrightarrow{\sigma}$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{R}^3$ di dimensione due ed i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ formano una sua base. Quindi, per ogni punto $P \in \sigma$, esistono $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tali che

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC}.$$

Pertanto, indicate con (x, y, z) le coordinate cartesiane del generico punto $P \in \sigma$, si ha che

$$\overrightarrow{AP} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = \lambda(x_1 - x_0, y_1 - y_0, z_1 - z_0) + \mu(x_2 - x_0, y_2 - y_0, z_2 - z_0)$$

e quindi

$$\begin{cases} x - x_0 = \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y - y_0 = \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - y_0) \\ z - z_0 = \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) + \mu(x_2 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) + \mu(y_2 - 2_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) + \mu(z_2 - z_0) \end{cases}, \ \lambda, \mu \in \mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Le equazioni (7.4) sono le equazioni parametriche del piano σ.

Si noti che poichè i vettori $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ sono linearmente indipendenti mentre $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ e $\overrightarrow{AP}$ sono linearmente dipendenti si ha che

$$rg \begin{pmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 2, \quad rg \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 \end{pmatrix} = 2,$$

quindi

$$rg \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \end{pmatrix} = rg \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & 0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 & z_2 - z_0 & 0 \end{pmatrix} = 3,$$

in quanto

$$\det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 & 0\\ x_0 & y_0 & z_0 & 1\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0 & 0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0 & 0\end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & z_1-z_0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & z_2-z_0\end{pmatrix} = 0$$

ed almeno uno tra

$$\det\begin{pmatrix} y_0 & z_0 & 1\\ y_1-y_0 & z_1-z_0 & 0\\ y_2-y_0 & z_2-z_0 & 0\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} x_0 & z_0 & 1\\ x_1-x_0 & z_1-z_0 & 0\\ x_2-x_0 & z_2-z_0 & 0\end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} x_0 & y_0 & 1\\ x_1-x_0 & y_1-y_0 & 0\\ x_2-x_0 & y_2-y_0 & 0\end{pmatrix}$$

è non nullo. Quindi

$$\det\begin{pmatrix} x & y & z & 1\\ x_0 & y_0 & z_0 & 1\\ x_1 & y_1 & z_1 & 1\\ x_2 & y_2 & z_2 & 1\end{pmatrix} = 0.$$

Sviluppando secondo Laplace rispetto alla prima riga si ottiene una equazione lineare nelle indeterminate x, y, z del tipo

$$ax + by + cz + d = 0, \tag{7.5}$$

dove $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. L'equazione (7.5) è l'equazione cartesiana del piano σ.

Se il piano σ ha equazione cartesiana $ax + by + cz + d = 0$, con $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, allora l'equazione $ax + by + cz = 0$ si dice *equazione cartesiana della giacitura* $\overrightarrow{\sigma}$. Infatti un vettore della giacitura $\overrightarrow{\sigma}$ è soluzione dell'equazione cartesiana della giacitura $\overrightarrow{\sigma}$.

Il vettore $\mathbf{n} = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ è ortogonale a $\overrightarrow{\sigma}$ ed è detto *vettore normale* al piano σ. In altri termini $\langle\overrightarrow{\sigma}\rangle^{\perp} = \langle\mathbf{n}\rangle$ Da quanto detto precedentemente vale quanto segue.

Lemma 7.6. *Siano* $\sigma : ax+by+cz+d = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ *e* $\sigma' : a'x+b'y+c'z+d' = 0$ $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$ *due piani di* $\mathbf{E}^3$.

i) σ, σ' *sono paralleli se e solo se i vettori* $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ *sono proporzionali.*

ii) σ, σ' *sono perpendicolari se e solo se i vettori* $(a, b, c), (a', b', c') \in \mathbb{R}^3$ *sono ortogonali.*

Sia σ il piano di equazioni cartesiane $ax + by + cz + d = 0$ e sia P_0 un punto di coordinate cartesiane (x_0, y_0, z_0). L'unico piano σ' passante per P_0 e parallelo a σ ha equazione cartesiana

$$ax + by + cz - ax_0 - by_0 - cz_0 = 0.$$

Infatti $P_0 \in \sigma'$ ed i vettori normali dei due piani sono proporzionali.

Sia ℓ la retta di $\mathbf{E}^3$ individuata dai due punti distinti $A = (x_0, y_0, z_0), B = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbf{E}^3$. Il vettore (non nullo) $\overrightarrow{AB} \in \mathbb{R}^3$ è una base della giacitura $\overrightarrow{\ell}$ di ℓ. Pertanto, se $P \in \ell$, i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ sono linearmente dipendenti e quindi

$$\overrightarrow{AP} = \lambda\overrightarrow{AB},\ \lambda \in \mathbb{R}.$$

Se $P = (x, y, z)$, allora si ha

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_1 - x_0) \\ y = y_0 + \lambda(y_1 - y_0) \\ z = z_0 + \lambda(z_1 - z_0) \end{cases}, \ \lambda \in \mathbb{R}. \tag{7.6}$$

Le equazioni (7.6) le equazioni parametriche della retta $\ell = AB$.

Si noti che poichè i vettori $\overrightarrow{AB}$ e $\overrightarrow{AP}$ sono linearmente dipendenti si ha che

$$rg\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \end{pmatrix} = 1,$$

quindi

$$rg\begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{pmatrix} = rg\begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 & 0 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 & 0 \end{pmatrix} = 2,$$

in quanto almeno uno tra

$$\det\begin{pmatrix} x_0 & 1 \\ x_1 & 1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} y_0 & 1 \\ y_1 & 1 \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} z_0 & 1 \\ z_1 & 1 \end{pmatrix},$$

è non nullo. Quindi se

$$M = \begin{pmatrix} x & y & z & 1 \\ x_0 & y_0 & z_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \end{pmatrix},$$

per il Teorema di Kronecker, esiste una sottomatrice quadrata di ordine due di M che ha determinante diverso da zero mentre le sue due orlate hanno determinante nullo. Si ottengono due equazioni lineari nelle indeterminate x, y, z del tipo

$$\begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d = 0 \end{cases}, \ rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2 \tag{7.7}$$

Le equazioni (7.7) sono le equazioni cartesiane della retta $\ell = AB$.

Le equazioni cartesiane della giacitura $\overrightarrow{\ell}$ sono

$$\begin{cases} ax + by + cz = 0 \\ a'x + b'y + c'z = 0 \end{cases}, \ rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

Infatti un vettore direttore di ℓ è soluzione delle equazioni cartesiane della giacitura $\overrightarrow{\ell}$. Si noti che se la retta ℓ ha equazioni cartesiane

$$\ell \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases}, \ rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2,$$

allora $\ell = \sigma \cap \sigma'$, dove $\sigma : ax + by + cz = 0$ e $\sigma' : a'x + b'y + c'z = 0$. Siano $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$ i vettori normali ai piani σ e σ', rispettivamente, allora un vettore direttore di ℓ risulta

$$\mathbf{n} \times \mathbf{n}' = \left(\det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} c & a \\ c' & a' \end{pmatrix}, \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}\right) = (bc' - b'c, a'c - ac', ab' - a'b),$$

Sia ℓ la retta di $\mathbf{E}^3$ avente equazioni cartesiane

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}, \quad rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$$

e sia P_0 un punto di coordinate cartesiane (x_0, y_0, z_0). L'unica retta ℓ' passante per P_0 e parallela ad ℓ ha equazione cartesiana

$$\begin{cases} ax+by+cz-ax_0-by_0-cz_0=0 \\ a'x+b'y+c'z-a'x_0-b'y_0-c'z_0=0 \end{cases}, \quad rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$$

Infatti $P_0 \in \ell'$ ed i vettori direttori di ℓ ed ℓ' sono proporzionali. Le equazioni parametriche di ℓ' risultano:

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda \det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix} \\ y = y_0 + \lambda \det\begin{pmatrix} c & a \\ c' & a' \end{pmatrix} \\ z = z_0 + \lambda \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix} \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Sia $\sigma : ax+by+cz+d=0$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ un piano di $\mathbf{E}^3$ e sia P_0 un punto di coordinate cartesiane (x_0, y_0, z_0). L'unica retta ℓ' passante per P_0 e perpendicolare a σ ha equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda a \\ y = y_0 + \lambda b \\ z = z_0 + \lambda c \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

D'altro canto, se una retta ℓ di $\mathbf{E}^3$ ha equazioni cartesiane

$$\begin{cases} ax+by+cz+d=0 \\ a'x+b'y+c'z+d'=0 \end{cases}, \quad rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}=2$$

e P_0 è il punto di coordinate cartesiane (x_0, y_0, z_0), allora l'unico piano σ passante per P_0 e perpendicolare ad ℓ ha equazione cartesiana

$$\det\begin{pmatrix} b & c \\ b' & c' \end{pmatrix}(x-x_0) + \det\begin{pmatrix} c & a \\ c' & a' \end{pmatrix}(y-y_0) + \det\begin{pmatrix} a & b \\ a' & b' \end{pmatrix}(z-z_0) = 0.$$

Due rette ℓ, ℓ' di $\mathbf{E}^3$ si definiscono *sghembe* se $\ell \cap \ell' = \emptyset$ e $\overrightarrow{\ell} \cap \overrightarrow{\ell'} = \mathbf{0}$.

7.2.1 Posizione reciproca di due piani di $\mathbf{E}^3$

Siano σ, σ' due piani dello spazio euclideo $\mathbf{E}^3$ aventi equazioni cartesiane $\sigma : ax+by+cz+d=0$ e $\sigma' : a'x+b'y+c'z+d'=0$, $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ e $(a',b',c') \neq (0,0,0)$. La loro intersezione $\sigma \cap \sigma'$ è rappresentata dal sistema lineare:

$$\begin{cases} ax+by+cz=-d \\ a'x+b'y+c'z=-d' \end{cases},$$

dove

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \end{pmatrix}$$

sono rispettivamente la matrice incompleta e completa associata al sistema. Si noti che $1 \leq rg(A) \leq 2$, vi sono pertanto tre possibilità:

1) $rg(\bar{A}) = 1$ (e quindi $rg(A) = 1$). In tal caso i piani σ, σ' coincidono.

2) $rg(A) = 1$ e $rg(\bar{A}) = 2$. In tal caso i piani σ e σ' sono paralleli e disgiunti.

3) $rg(A) = 2$ (e quindi $rg(\bar{A}) = 2$). In tal caso i piani σ e σ' sono incidenti ed hanno una retta ℓ in comune. In particolare la retta ℓ ha equazioni cartesiane

$$\ell : \begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \end{cases}, \quad rg\begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2.$$

Si definisce *fascio proprio* di piani l'insieme di tutti i piani di $\mathbf{E}^3$ che contengono una stessa retta ℓ, detta *asse del fascio*.

Teorema 7.7. *Siano* $\sigma : ax+by+cz+d = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $\ell' : a'x+b'y+c'z+d' = 0$, $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, *due piani distinti di un fascio proprio di* $\mathbf{E}^3$*. Allora tutti e soli i piani di tale fascio hanno un'equazione del tipo* $\lambda(ax + by + cz + d) + \mu(a'x + b'y + c'z + d') = 0$, *con* $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$.

Si definisce *fascio improprio* di piani l'insieme di tutti i piani di $\mathbf{E}^3$ paralleli ad uno stesso piano. Analogamente al Teorema 7.7, valgono i seguenti risultati.

Teorema 7.8. *Sia* $\sigma : ax + by + c + d = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, *un piano di un fascio improprio di* $\mathbf{E}^3$*. Allora tutti e soli i piani di tale fascio hanno un'equazione del tipo* $ax + by + cz + \lambda = 0$, *con* $\lambda \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.9. *Tre piani distinti* $\sigma : ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$, $\sigma' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$, $(a', b', c') \neq (0, 0, 0)$, $\sigma'' : a''x + b''y + c''z + d'' = 0$, $(a'', b'', c'') \neq (0, 0, 0)$, *appartengono ad uno stesso fascio di* $\mathbf{E}^3$ *(proprio oppure improprio) se e solo se*

$$rg\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a' & b' & c' & d' \\ a'' & b'' & c'' & d'' \end{pmatrix} < 3.$$

7.2.2 Posizione reciproca di un piano ed una retta in $\mathbf{E}^3$

In $\mathbf{E}^3$ si considerino il piano $\sigma : ax + by + cz + d = 0$ e la retta

$$\ell : \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta' = 0 \end{cases}.$$

Posto
$$M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}, \quad \bar{M} = \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \delta' \end{pmatrix},$$
si ha che $2 \leq rg(M) \leq 3$. Vi sono pertanto tre possibilità:

1) $rg(\bar{M}) = 2$ (e quindi $rg(M) = 2$). In tal caso la retta ℓ è contenuta nel piano σ.

2) $rg(M) = 2$ e $rg(\bar{M}) = 3$. In tal caso la retta ℓ ed il piano σ sono paralleli e disgiunti.

3) $rg(M) = 3$ (e quindi $rg(\bar{M}) = 3$). In tal caso la retta ℓ ed il piano σ hanno un punto in comune e si dicono *incidenti*.

In particolare valgono i seguenti risultati:

Teorema 7.10. *In* $\mathbf{E}^3$*, sia* $\sigma : ax + by + cz + d = 0$ *un piano ed* ℓ *una retta con vettore direttore* (r_1, r_2, r_3)*.*

i) La retta ℓ *è parallela a* σ *se e solo se* $ar_1 + br_2 + cr_3 = 0$*.*

ii) La retta ℓ *è perpendicolare a* σ *se e solo se* $rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = 1$*.*

7.2.3 Posizione reciproca di due rette in $\mathbf{E}^3$

Se ℓ, ℓ' sono le rette di equazioni cartesiane
$$\ell \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d = 0 \end{cases}, \quad rg \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \end{pmatrix} = 2,$$
$$\ell' \begin{cases} \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta = 0 \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z + \delta = 0 \end{cases}, \quad rg \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix} = 2.$$
La loro intersezione $\ell \cap \ell'$ è rappresentata dal sistema lineare:
$$\begin{cases} ax + by + cz = -d \\ a'x + b'y + c'z = -d' \\ \alpha x + \beta y + \gamma z = -\delta \\ \alpha' x + \beta' y + \gamma' z = -\delta' \end{cases},$$
dove
$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} a & b & c & -d \\ a' & b' & c' & -d' \\ \alpha & \beta & \gamma & -\delta \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & -\delta' \end{pmatrix}$$
sono rispettivamente la matrice incompleta e completa associata al sistema. Si noti che $2 \leq rg(A) \leq 3$, vi sono pertanto quattro possibilità:

1) $rg(A) = rg(\bar{A}) = 2$. In tal caso le rette ℓ, ℓ' coincidono.

2) $rg(A) = 2$ e $rg(\bar{A}) = 3$. In tal caso le rette ℓ e ℓ' sono parallele e disgiunte (si noti che in tal caso $\overrightarrow{\ell} \cap \overrightarrow{\ell'} \neq \mathbf{0}$).

3) $rg(A) = rg(\bar{A}) = 3$. In tal caso le rette ℓ e ℓ' sono incidenti ed hanno un punto in comune.

4) $rg(\bar{A}) = 4$ (e quindi $rg(A) = 3$). In tal caso le rette ℓ, ℓ' sono sghembe.

Valgono i seguenti risultati:

Teorema 7.11. *Siano ℓ, ℓ' due rette di $\mathbf{E}^3$ con vettori direttori (r_1, r_2, r_3) e (r'_1, r'_2, r'_3), rispettivamente.*

i) Le rette ℓ, ℓ' sono parallele se e solo se $rg \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \\ r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix} = 1$ (i loro vettori direttori sono proporzionali).

ii) Le rette ℓ, ℓ' sono perpendicolari se e solo se $r_1 r'_1 + r_2 r'_2 + r_3 r'_3 = 0$ (i loro vettori direttori sono ortogonali).

7.2.4 Angoli e distanze

Si definisce *angolo (convesso)* tra due piani π, π', l'angolo (convesso) tra i vettori normali dei piani π, π'.

Si definisce *angolo (convesso)* tra un piano π con vettore normale $\mathbf{n}$ ed una retta ℓ con vettore direzione $\mathbf{v}$, l'angolo $\frac{\pi}{2} - \theta$, dove θ è l'angolo tra i vettori $\mathbf{n}$ e $\mathbf{v}$.

Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$, $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ un piano di $\mathbf{E}^3$, P_0 un punto di coordinate cartesiane (x_0, y_0, z_0) ed ℓ l'unica retta passante per P_0 e perpendicolare a π. Sia $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ l'unico punto in comune tra ℓ e π. Si definisce *distanza* tra il punto P_0 ed il piano π e si denota con $d(P_0, \pi)$, la distanza euclidea tra P_0 e P_1.

Poichè $\overrightarrow{P_1P_0}$ è ortogonale alla giacitura di π, si ha che $\overrightarrow{P_1P_0} \in \langle \mathbf{n} \rangle$, dove $\mathbf{n} = (a, b, c)$ è il vettore normale al piano π. Pertanto esiste $\lambda \in \mathbb{R}$ tale che $\overrightarrow{P_1P_0} = \lambda(a, b, c)$. Ne segue che

$$d(P_0, \sigma) = d(P_0, P_1) = ||\overrightarrow{P_1P_0}|| = ||\lambda(a, b, c)|| = |\lambda|\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Inoltre $x_0 - x_1 = \lambda a$, $y_0 - y_1 = \lambda b$ e $z_0 - z_1 = \lambda c$ da cui si ottiene $x_1 = x_0 - \lambda a$ e $y_1 = y_0 - \lambda b$. Poichè $P_1 \in \sigma$ si ha che

$$a(x_0 - \lambda a) + b(y_0 - \lambda b) + c(z_0 - \lambda c) + d = 0$$

e quindi

$$\lambda = \frac{ax_0 + by_0 + cz_0 + d}{a^2 + b^2 + c^2}.$$

Pertanto
$$d(P_0, \sigma) = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Siano π, π' due piani di $\mathbf{E}^3$ paralleli e disgiunti. Si definisce *distanza* tra i piani π, π' e si denota con $d(\pi, \pi')$, la distanza $d(A, \pi')(= d(\pi, B))$, dove A è un punto arbitrario di π (B un punto arbitrario di π'). Se π, π' sono incidenti oppure coincidono, allora $d(\pi, \pi') = 0$.

Sia ℓ una retta di $\mathbf{E}^3$, P_0 un punto di $\mathbf{E}^3$ e σ l'unico piano di $\mathbf{E}^3$ passante per P_0 e perpendicolare a ℓ. Sia P_1 l'unico punto in comune tra ℓ e σ. Definiamo la *distanza* $d(P_0, \ell)$ tra P_0 e la retta ℓ come la distanza euclidea tra P_0 e P_1.

Siano ℓ una retta e π un piano. Se ℓ e π sono incidenti oppure ℓ è contenuta in π, allora $d(\ell, \pi) = 0$. Se ℓ e σ sono paralleli e disgiunti, allora definiamo *distanza* tra la retta ℓ ed il piano π come $d(\ell, \pi) = d(P, \pi)$, dove P e un punto arbitrario di ℓ.

Infine siano ℓ, ℓ' due rette sghembe di $\mathbf{E}^3$ e σ l'unico piano di $\mathbf{E}^3$ contenente ℓ e parallelo a ℓ'. Si definisce la *distanza* $d(\ell, \ell')$ tra le rette ℓ, ℓ' come la distanza euclidea tra P e σ, dove P è un punto qualsiasi di ℓ'. Siano $P_0 \in \ell, Q_0 \in \ell'$ i punti di minima distanza $(d(\ell, \ell') = d(P_0, Q_0))$. Allora la retta passante per P_0 e Q_0 si definisce *retta di minima distanza*. Pertanto la retta di minima distanza è incidente ed ortogonale ad entrambe le rette ℓ ed ℓ'.

7.3 Prodotto vettoriale

Sia V uno spazio vettoriale euclideo di dimensione 3 e sia $\cdot : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ un prodotto scalare. Sia $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ una base ortonormale di V.

Si definisce *prodotto vettoriale* l'applicazione da $V \times V$ a V che associa alla coppia di vettori $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2) \in V \times V$, dove $\mathbf{v}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\mathbf{v}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$, il vettore $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ (si legge "$\mathbf{v}_1$ vettor $\mathbf{v}_2$"), dove

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} := \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} =$$

$$= (y_1z_2 - y_2z_1)\boldsymbol{i} - (x_1z_2 - x_2z_1)\boldsymbol{j} + (x_1y_2 - x_2y_1)\boldsymbol{k}.$$

Il prossimo risultato mostra alcune proprietà del prodotto vettoriale.

Proposizione 7.12. *$\forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$, $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}$,*

i) $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = -\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1$,

ii) $\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3$, $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3$,

iii) $\lambda(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = (\lambda\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 \times (\lambda\mathbf{v}_2)$,

iv) $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ *se e solo se* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ *sono linearmente dipendenti,*

v) $||\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2||^2 = ||\mathbf{v}_1||^2\, ||\mathbf{v}_2||^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2$,

vi) $||\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|| = ||\mathbf{v}_1||\, ||\mathbf{v}_2|| \operatorname{sen}\theta$, *dove* θ *è l'angolo tra* $\mathbf{v}_1$ *e* $\mathbf{v}_2$.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\mathbf{v}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$ e $\mathbf{v}_3 = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$.

i)

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = -\det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} = -\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1.$$

ii)

$$\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3) = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 + x_3 & y_2 + y_3 & z_2 + z_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 + \mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3.$$

iii)

$$\lambda(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \lambda \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \lambda x_1 & \lambda y_1 & \lambda z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = (\lambda\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2.$$

iv) Essendo $\{\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}\}$ una base di V,

$$\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = \mathbf{0}$$

se e solo se

$$\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

se e solo se

$$rg \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = 1$$

se e solo se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti.

v)

$$||\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2||^2 = (y_1 z_2 - y_2 z_1)^2 + (x_1 z_2 - x_2 z_1)^2 + (x_1 y_2 - x_2 y_1)^2 =$$
$$= (x_1 + y_1 + z_1)^2 + (x_2 + y_2 + z_2)^2 - (x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2)^2 = ||\mathbf{v}_1||^2 \, ||\mathbf{v}_2||^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2.$$

vi)

$$||\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2||^2 = ||\mathbf{v}_1||^2 \, ||\mathbf{v}_2||^2 - (\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2)^2 = ||\mathbf{v}_1||^2 \, ||\mathbf{v}_2||^2 - ||\mathbf{v}_1||^2 \, ||\mathbf{v}_2||^2 \cos^2\theta =$$
$$= ||\mathbf{v}_1||^2 \, ||\mathbf{v}_2||^2 (1 - \cos^2\theta) = ||\mathbf{v}_1||^2 \, ||\mathbf{v}_2||^2 \operatorname{sen}^2\theta.$$

Pertanto $||\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|| = ||\mathbf{v}_1|| \, ||\mathbf{v}_2|| \operatorname{sen}\theta$, essendo $\operatorname{sen}\theta \geq 0$, se $\theta \in [0, \pi]$. □

7.4 Prodotto misto

Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$. Si definisce *prodotto misto* dei vettori $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \in V$ il numero reale

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3.$$

Se $\mathbf{v}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\mathbf{v}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$ e $\mathbf{v}_3 = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$, allora

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \right) \cdot (x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}) =$$
$$= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} x_3 - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} y_3 + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} z_3 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}.$$

Pertanto

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}. \tag{7.8}$$

Proposizione 7.13. $\forall\, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3, \mathbf{v}_4 \in V$,

i) $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = 0$ *se e solo se* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ *sono linearmente dipendenti,* *ii)* $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2$,

iii) $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4) = \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4 \end{pmatrix}$.

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1 = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$, $\mathbf{v}_2 = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$, $\mathbf{v}_3 = x_3\boldsymbol{i} + y_3\boldsymbol{j} + z_3\boldsymbol{k}$ e $\mathbf{v}_4 = x_4\boldsymbol{i} + y_4\boldsymbol{j} + z_4\boldsymbol{k}$.

i) Tenendo conto della (7.8), si ha che

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$$

se e solo se $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ sono linearmente indipendenti.

ii)

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3) \cdot \mathbf{v}_1,$$

$$(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_3 = \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x_3 & y_3 & z_3 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix} = (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1) \cdot \mathbf{v}_2.$$

iii)

$$\begin{aligned} &(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \cdot (\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_4) = \\ &= \left(\begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \right) \cdot \left(\begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} \boldsymbol{i} - \begin{vmatrix} x_3 & z_3 \\ x_4 & z_4 \end{vmatrix} \boldsymbol{j} + \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} \boldsymbol{k} \right) = \\ &= \begin{vmatrix} y_1 & z_1 \\ y_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} y_3 & z_3 \\ y_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & z_1 \\ x_2 & z_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & z_3 \\ x_4 & z_4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{vmatrix} = \\ &= (x_1x_3 + y_1y_3 + z_1z_3)(x_2x_4 + y_2y_4 + z_2z_4) - (x_1x_4 + y_1y_4 + z_1z_4)(x_2x_3 + y_2y_3 + z_2z_3) = \\ &= \det \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_4 \\ \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_3 & \mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{v}_4 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

□

Corollario 7.14. *Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ vettori linearmente indipendenti, allora*

i) $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$ *se e solo se* $\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$, *per qualche* $\lambda \in \mathbb{R}$,

ii) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\}$ *è una base di* V.

Dimostrazione. i) Sia $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = (\lambda\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$. Poichè $\lambda\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente dipendenti, dalla Proposizione 7.13, *i)*, si ha che $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_1 = ((\lambda\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_1 = 0$ e $\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}_2 = ((\lambda\mathbf{v}_1) \times \mathbf{v}_2) \cdot \mathbf{v}_2 = 0$. Allora $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_1$, $\mathbf{v} \perp \mathbf{v}_2$ e quindi $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$.

Viceversa, poichè $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti (quindi $\dim(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle) = 2$) e $\dim(V) = 3$, dalla Proposizione 3.13, si ha che $\dim(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp) = 1$. Inoltre dalla Proposizione 7.12, *iv)*, $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$, mentre dalla Proposizione 7.13, *i)*, si ha che $\mathbf{v}_1 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \cdot (\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) = 0$ e quindi $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \perp \mathbf{v}_1$, $(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2) \perp \mathbf{v}_2$. Pertanto $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$ e quindi $\{\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\}$ è una base di $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$. Ne segue che se $\mathbf{v} \in \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle^\perp$, allora $\mathbf{v} = \lambda(\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2)$, per qualche $\lambda \in \mathbb{R}$.

ii) Poichè $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \notin \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$, si ha che $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ sono linearmente indipendenti. Quindi $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 \rangle \subseteq V$ e $\dim(\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 \rangle) = \dim(V) = 3$. Allora $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 \rangle = V$ e $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\}$ è una base di V. $\square$

Esercizi 7.15.

1. Determinare l'equazione del piano σ passante per i punti $A = (2,1,0)$, $B = (-1,0,1)$ e parallelo alla retta $\ell : \begin{cases} x+y-4z-1=0 \\ x-y+2z+1=0 \end{cases}$.

   Sia $\sigma : ax+by+cz+d=0$ e sia $\mathbf{n} = (a,b,c)$. Poichè $A, B \in \sigma$ si ha che $\begin{cases} 2a+b+d=0 \\ -a+c+d=0 \end{cases}$. Pertanto $\mathbf{n} = (c+d, -2c-3d, c)$. Se $\mathbf{v}$ è un vettore direttore di ℓ, allora $\mathbf{v} \in \left\langle \left(\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \right) \right\rangle = \langle(-2,-6,-2)\rangle$ e $\mathbf{v} = (1,3,1)$. Inoltre $\mathbf{n} \in \langle \mathbf{v} \rangle^\perp$ e quindi $(c+d, -2c-3d, c) \cdot (1,3,1) = 0$, da cui si ottiene $c = -2d$. Pertanto $\sigma : x-y+2z-1=0$.

   Un altro modo è il seguente: si noti che $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{\ell}$ e $\mathbf{n} \perp \overrightarrow{AB}$, allora $\mathbf{n} \in \langle \mathbf{v} \times \overrightarrow{AB} \rangle$, dove $\mathbf{v} \times \overrightarrow{AB} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 3 & 1 \\ -3 & -1 & 1 \end{vmatrix} = (4,-4,8)$. Allora $\mathbf{n} = (1,-1,2)$ e $\sigma : x-y+2z+d=0$. Poichè $A \in \sigma$, si ha che $d = -1$.

2. Determinare la posizione reciproca delle rette

$$\ell : \begin{cases} x = -2-2\lambda \\ y = 1+4\lambda \\ z = \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \ell' : \begin{cases} x = 1+2\mu \\ y = -2+\mu \\ z = 2-\mu \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}.$$

   I vettori direttori di ℓ, ℓ' sono $\mathbf{v} = (-2,4,1)$, $\mathbf{v}' = (2,1,-1)$, rispettivamente. Poichè $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ non sono proporzionali, le due rette non sono parallele. Pertanto sono incidenti o sghembe.

   Le loro equazioni cartesiane sono

$$\ell : \begin{cases} x+2z+2=0 \\ y-4z-1=0 \end{cases}, \qquad \ell' : \begin{cases} x-2y-5=0 \\ y+z=0 \end{cases}.$$

   Poichè $rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -1 \\ 1 & -2 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 4$, si ha che le rette sono sghembe.

Un altro modo è il seguente: siano $A = (-2, 1, 0) \in \ell$, $B = (1, -2, 2) \in \ell'$. Allora ℓ, ℓ' sono complanari se e solo se $\overrightarrow{AB} \in \langle \mathbf{v}, \mathbf{v}' \rangle$ se e solo se $\overrightarrow{AB}, \mathbf{v}, \mathbf{v}'$ sono linearmente dipendenti se e solo se $(\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' = 0$, dove $\overrightarrow{AB} = (3, -3, 2)$. Poichè $(\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ -2 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -35 \neq 0$, le rette sono sghembe.

3. Verificare che le rette

$$\ell : \begin{cases} x = \lambda \\ y = \lambda \\ z = 1 + \lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \ell' : \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2y + z - 4 = 0 \end{cases}$$

sono incidenti e determinare il piano π che le contiene.

Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ vettori direttori di ℓ, ℓ', rispettivamente. Allora $\mathbf{v} = (1, 1, 1)$ e $\mathbf{v}' \in \left\langle \left(\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \right) \right\rangle = \langle (3, -1, 2) \rangle$ e $\mathbf{v}' = (3, -1, 2)$. Poichè $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ non sono proporzionali, allora ℓ, ℓ' sono sghembe oppure incidenti. Siano $A = (0, 0, 1) \in \ell$ e $B = (4, 0, 4) \in \ell'$. Le rette ℓ, ℓ' sono complanari (e quindi incidenti) se e solo se $(\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' = 0$. Infatti $(\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' = \begin{vmatrix} 4 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$.

Sia $\pi : ax + cy + cz + d = 0$ e sia $\mathbf{n} = (a, b, c)$ un vettore normale al piano π. Allora $\mathbf{n} \in \langle \mathbf{v} \times \mathbf{v}' \rangle = \left\langle \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \right\rangle = \langle (3, 1, -4) \rangle$ e $\pi : 3x + y - 4z + d = 0$. Poichè $A \in \pi$, si ha che $d = 4$. Quindi $\pi : 3x + y - 4z + 4 = 0$.

4. Sia π il piano passante per i punti $A = (0, 0, 3)$, $B = (2, 4, -1)$, $C = (6, 0, 0)$. Determinare il punto D di intersezione tra π e l'asse y e la distanza tra π e la retta $\ell : \begin{cases} 2x + 3y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$.

Sia $\pi : ax + by + cz + d = 0$ e sia $\mathbf{n} = (a, b, c)$ un vettore normale al piano π. Allora $\mathbf{n} \in \langle \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \rangle$, dove $\overrightarrow{AB} = (2, 4, -4)$ e $\overrightarrow{AC} = (6, 0, -3)$. Quindi $\mathbf{n} = (2, 3, 4)$. Poichè $A \in \pi$, si ha che $d = -12$ e $\pi : 2x + 3y + 4z - 12 = 0$.

Il punto D è soluzione di $\begin{cases} 2x + 3y + 4z - 12 = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{cases}$. Quindi $D = (0, 4, 0)$. Un vettore direttore $\mathbf{v}$ della retta ℓ risulta $\mathbf{v} = \left(\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} \right) = (3, -2, 0)$. Poichè $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = (2, 3, 4) \cdot (3, -2, 0) = 0$, la retta ℓ è parallela al piano π. Inoltre $O = (0, 0, 0) \in \ell$ e $O \notin \pi$, allora la retta ℓ è parallela e disgiunta al piano π. Pertanto $d(\ell, \pi) = d(O, \pi) = \frac{|-12|}{||\mathbf{n}||} = \frac{12}{\sqrt{29}}$.

5. Verificare che le rette

$$\ell : \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}, \quad \lambda \in \mathbb{R}, \qquad \ell' : \begin{cases} x = 1 + \mu \\ y = 1 - \mu \\ z = 3 \end{cases}, \quad \mu \in \mathbb{R}$$

sono sghembe. Determinare la retta r di minima distanza e la distanza tra le rette ℓ, ℓ'.

Siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}'$ vettori direttori di ℓ, ℓ', rispettivamente. Allora $\mathbf{v} = (0, 1, -2)$ e $\mathbf{v}' = (1, -1, 0)$. Poichè $\mathbf{v}$ e $\mathbf{v}'$ non sono proporzionali, le rette ℓ, ℓ' sono incidenti o sghembe. Siano $A = (2, 2, 1) \in \ell$ e $B = (1, 1, 3) \in \ell'$. Le rette ℓ, ℓ' sono complanari (e quindi incidenti) se e solo se $(\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' = 0$. Poichè $(\overrightarrow{AB} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{v}' = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$, ℓ, ℓ' sono sghembe.

Siano $P = (2, 2 + \lambda, 1 - 2\lambda) \in \ell$, $P' = (1 + \mu, 1 - \mu, 3) \in \ell'$. Allora $\overrightarrow{P, P'} = (-1 + \mu, -1 - \lambda - \mu, 2 + 2\lambda)$. Imponendo che $\overrightarrow{PP'} \perp \mathbf{v}$ e $\overrightarrow{PP'} \perp \mathbf{v}'$ si ha che $\lambda = 5/9$ e $\mu = -10/9$. Pertanto i punti di minima distanza sono $P_1 = \left(2, \frac{8}{9}, \frac{29}{9}\right)$ e $P_2 = \left(\frac{14}{9}, \frac{4}{9}, 3\right)$. Un vettore direttore della retta r è $(2, 2, 1) \in \langle \overrightarrow{P_1P_2} \rangle = \left\langle \left(-\frac{4}{9}, -\frac{4}{9}, -\frac{2}{9}\right) \right\rangle$. Allora $r : \begin{cases} x = \frac{14}{9} + 2t \\ y = \frac{4}{9} + 2t \\ z = 3 - t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ e $d(\ell, \ell') = d(P_1, P_2) = ||\overrightarrow{P_1P_2}|| = \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} = \frac{2}{3}$.

Un altro modo per calcolare la distanza tra ℓ ed ℓ' è il seguente:

$$d(\ell, \ell') = \frac{|\overrightarrow{AB} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{v}')|}{||\mathbf{v} \times \mathbf{v}'||} = \frac{|2|}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3},$$

dove $\mathbf{v} \times \mathbf{v}' = (-2, 2, -1)$.

8 Applicazioni lineari

Siano V, W due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali. Un'applicazione $F : V \longrightarrow W$ si dice *lineare* o *omomorfismo* o *mappa lineare* o *operatore lineare* se

1) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $F(\mathbf{v} + \mathbf{v}') = F(\mathbf{v}) + F(\mathbf{v}')$,

2) $\forall \mathbf{v} \in V$, $\forall c \in \mathbb{K}$, $F(c\mathbf{v}) = cF(\mathbf{v})$.

Le due condizioni precedenti sono equivalenti alla seguente:

3) $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, $\forall c, c' \in \mathbb{K}$, $F(c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}') = cF(\mathbf{v}) + c'F(\mathbf{v}')$.

Infatti se vale la 3) allora, posto $c = c' = 1$ vale la 1), mentre per $c' = 0$ vale la 2). Viceversa se valgono 1) e 2), allora $F(c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}') = F(c\mathbf{v}) + F(c'\mathbf{v}') = cF(\mathbf{v}) + c'F(\mathbf{v}')$ e quindi vale la 3).

Osservazione 8.1. *i)* Applicando la 2) per $c = 0$, si ha che se F è lineare, allora $F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

ii) Iterando la 3), si ha che se F è lineare, allora $\forall \mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$, $\forall c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$, $F(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1F(\mathbf{v}_1) + \ldots c_nF(\mathbf{v}_n)$.

Un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow V$ si dice *endomorfismo di* V, mentre un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow \mathbb{K}$ si dice *funzionale lineare su* V.

Un'applicazione $F : V \longrightarrow W$ si dice *iniettiva* se $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, tali che $F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}')$, allora $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$.

Un'applicazione $F : V \longrightarrow W$ si dice *suriettiva* se $\forall \mathbf{w} \in W$, allora $\exists\ \mathbf{v} \in V$ tale che $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$.

Un'applicazione che è sia iniettiva che suriettiva si dice *biettiva*. Un'applicazione lineare biettiva si dice *isomorfismo*.

Esempi 8.2. 1. L'applicazione $\mathbf{0}_V : V \longrightarrow W$ tale che $\mathbf{0}_V(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, $\forall \mathbf{v} \in V$, è un'applicazione lineare detta *applicazione lineare nulla*.

2. L'applicazione $id_V : V \longrightarrow V$ tale che $F(\mathbf{v}) = \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in V$, è un isomorfismo detto *identità di* V.

3. Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale tale che $\dim(V) = n$ e sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base di V. L'applicazione $F_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{K}^n$ tale che $\forall \mathbf{v} \in V$, se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, allora

$$F_{\mathcal{B}}(\mathbf{v}) = F_{\mathcal{B}}(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$$

è un isomorfismo.

4. L'applicazione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathbb{K}$ tale che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $F(A) = Tr(A)$ è un funzionale lineare.

5. L'applicazione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $F(A) = A + A^t$ è un'applicazione lineare.

6. L'applicazione $F : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ tale che se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, $F(A) = A - A^t$ è un'applicazione lineare.

Lemma 8.3. *i) Siano V, W, U $\mathbb{K}$–spazi vettoriali e siano $F : V \longrightarrow W$, $G : W \longrightarrow U$ applicazioni lineari, allora $G \circ F : \mathbf{v} \in V \longmapsto (G \circ F)(\mathbf{v}) = G(F(\mathbf{v})) \in U$ è un'applicazione lineare.*

ii) Se $F : V \longrightarrow W$ un isomorfismo, allora $F^{-1} : W \longrightarrow V$ è un isomorfismo.

Dimostrazione. *i)* Mostriamo che $G \circ F$ è lineare: $\forall c, c' \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$, siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ tali che $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, $F(\mathbf{v}') = \mathbf{w}'$, quindi $F^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$, $F^{-1}(\mathbf{w}') = \mathbf{v}'$, si ha che

$$\begin{aligned}(G \circ F)(c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}') &= G(F(c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}')) = G(cF(\mathbf{v}) + c'F(\mathbf{v}')) = \\ &= cG(F(\mathbf{v})) + c'G(F(\mathbf{v}')) = c(G \circ F)(\mathbf{v}) + c'(G \circ F)(\mathbf{v}').\end{aligned}$$

ii) Mostriamo che F^{-1} è lineare: $\forall c, c' \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{w}, \mathbf{w}' \in W$, siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ tali che $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, $F(\mathbf{v}') = \mathbf{w}'$, quindi $F^{-1}(\mathbf{w}) = \mathbf{v}$, $F^{-1}(\mathbf{w}') = \mathbf{v}'$, si ha che

$$\begin{aligned}F^{-1}(c\mathbf{w} + c'\mathbf{w}') &= F^{-1}(cF(\mathbf{v}) + c'F(\mathbf{v}')) = F^{-1}(F(c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}')) = \\ &= c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}' = cF^{-1}(\mathbf{w}) + c'F^{-1}(\mathbf{w}').\end{aligned}$$

$\square$

Esempi 8.4. 1. Siano F e G le due applicazioni lineari date da:

$$F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + y, 2x, x - y) \in \mathbb{R}^3,$$

$$G : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x + z, -2x + y + z, y + 2z) \in \mathbb{R}^3.$$

Allora $G \circ F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dove

$$(G \circ F)(x, y) = G(F(x, y)) = G(x + y, 2x, x - y) = (3x + y, x - 3y, 4x - 2y)$$

e $G^2 = G \circ G : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, dove

$$\begin{aligned}G^2(x, y, z) = (G \circ G)(x, y, z) = G(G(x, y, z)) &= G(2x + z, -2x + y + z, y + 2z) \\ &= (4x + y + 4z, -6x + 2y + z, -2x + 3y + 5z)\end{aligned}$$

2. Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale, e sia F un endomorfismo su V tale che $F^2 - F + id_V = \mathbf{0}_V$. Allora F è un isomorfismo e $F^{-1} = id_V - F$. Infatti

$$(id_V - F) \circ F = id_V \circ F - F \circ F = F - F^2 = id_V.$$

8.1 Nucleo e Immagine

Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Si definisce *nucleo di* F il seguente sottoinsieme di V:

$$Ker(F) = \{\mathbf{v} \in V \ | \ F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}.$$

Si definisce *immagine di* F il seguente sottoinsieme di W:

$$Im(F) = \{\mathbf{w} \in W \ | \ \exists\, \mathbf{v} \in V \text{ con } F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\} = \{F(\mathbf{v}) \ | \ \mathbf{v} \in V\}.$$

Proposizione 8.5. *i) $Ker(F)$ è un sottospazio vettoriale di V.*

ii) $Im(F)$ è un sottospazio vettoriale di W.

Dimostrazione. Infatti $\forall c_1, c_2 \in \mathbb{K}$, $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in Ker(F)$, si ha che $F(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1F(\mathbf{v}_1) + c_2F(\mathbf{v}_2) = c_1\mathbf{0} + c_2\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e quindi $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \in Ker(F)$.

Inoltre $\forall \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \in Im(F)$, con $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ tali che $F(\mathbf{v}_1) = \mathbf{w}_1$ e $F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_2$, allora $F(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2$. Pertanto $c_1\mathbf{w}_1 + c_2\mathbf{w}_2 \in Im(F)$. □

Osservazione 8.6. Sia $F : V \longrightarrow W$ un omomorfismo e sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base di V, allora $Im(F) = \langle F(\mathbf{e}_1), \ldots, F(\mathbf{e}_n)\rangle$.

Osservazione 8.7. Sia $F : V \longrightarrow W$ un omomorfismo. F è suriettiva se e solo se $Im(F) = W$ o equivalentemente $\dim(Im(F)) = \dim(W)$.

Il prossimo risultato caratterizza le applicazioni lineari iniettive.

Teorema 8.8. *Siano V, W due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali. Un'applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$ è iniettiva se e solo se $Ker(F) = \{\mathbf{0}\}$.*

Dimostrazione. Se F è iniettiva, allora si supponga per assurdo che $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in Ker(F)$. Si ha che $F(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = F(\mathbf{0})$, ma allora $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, che è un assurdo.

Viceversa, se $Ker(F) = \mathbf{0}$, siano $\mathbf{v}, \mathbf{v}' \in V$ tali che $F(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}')$. Allora $F(\mathbf{v} - \mathbf{v}') = F(\mathbf{v}) - F(\mathbf{v}') = \mathbf{0}$, quindi $\mathbf{v} - \mathbf{v}' \in Ker(F)$. Pertanto $\mathbf{v} - \mathbf{v}' = \mathbf{0}$ e $\mathbf{v} = \mathbf{v}'$. Dunque F è iniettiva. □

Proposizione 8.9. *i) Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sono linearmente dipendenti, allora $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n) \in W$ sono linearmente dipendenti.*

ii) Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare iniettiva. I vettori $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sono linearmente dipendenti se e solo $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n) \in W$ sono linearmente dipendenti.

Dimostrazione. *i)* Siano $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ scalari non tutti nulli tali che $c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, allora $c_1F(\mathbf{v}_1) + \ldots + c_nF(\mathbf{v}_n)$ è una combinazione lineare non banale dei vettori $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ che è uguale al vettore nullo: $c_1F(\mathbf{v}_1) + \ldots + c_nF(\mathbf{v}_n) = F(c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n) = F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Pertanto $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente dipendenti.

ii) Viceversa, se $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sono linearmente indipendenti, allora siano $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tali che $c_1 F(\mathbf{v}_1) + \ldots + c_n F(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$. Ne segue che $F(c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$ e quindi $c_1\mathbf{v}_1 + \ldots c_n\mathbf{v}_n \in Ker(F)$. Ma $Ker(F) = \{\mathbf{0}\}$, poichè F è iniettiva. Quindi $c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$ da cui segue che $c_1 = \ldots = c_n = 0$, come volevasi. □

Osservazione 8.10. Dalla Proposizione 8.9, *i)*, si ha che se $F(\mathbf{v}_1), \ldots, F(\mathbf{v}_n) \in W$ sono linearmente indipendenti, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sono linearmente indipendenti.

Teorema 8.11. *(Formula dimensionale per applicazioni lineari)*
Siano V, W due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali e sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. Allora

$$\dim(Ker(F)) + \dim(Im(F)) = \dim(V).$$

Dimostrazione. Sia $n = \dim(V)$ e $s = \dim(Ker(F))$. Poichè $Ker(F)$ è sottospazio vettoriale di V, si ha $s \leq n$. Sia $\{\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_s\}$ una base di $Ker(F)$. Dal Teorema del completamento ad una base possiamo trovare $n - s$ vettori $\mathbf{v}_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ tali che $\{\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_s, \mathbf{v}_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V. Per completare la dimostrazione sarà sufficiente mostrare che $\{F(\mathbf{v}_{s+1}), \ldots, F(\mathbf{v}_n)\}$ è una base di $Im(F)$.

Mostriamo che $F(\mathbf{v}_{s+1}), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ generano $Im(F)$. Sia $\mathbf{w} \in Im(F)$ e sia $\mathbf{v} = a_1\mathbf{n}_1 + \ldots + a_s\mathbf{n}_s + a_{s+1}\mathbf{v}_{s+1} + \ldots + a_n\mathbf{v}_n \in V$ tale che $F(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$, allora $\mathbf{w} = F(\mathbf{v}) = F(a_1\mathbf{n}_1 + \ldots + a_s\mathbf{n}_s + a_{s+1}\mathbf{v}_{s+1} + \ldots + a_n\mathbf{v}_n) = a_1F(\mathbf{n}_1) + \ldots + a_sF(\mathbf{n}_s) + a_{s+1}F(\mathbf{v}_{s+1}) + \ldots + a_nF(\mathbf{v}_n) = a_{s+1}F(\mathbf{v}_{s+1}) + \ldots + a_nF(\mathbf{v}_n)$. Pertanto $Im(F) = \langle F(\mathbf{v}_{s+1}), \ldots, F(\mathbf{v}_n)\rangle$.

Mostriamo ora che $F(\mathbf{v}_{s+1}), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente indipendenti. Siano $c_{s+1}, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tali che $c_{s+1}F(\mathbf{v}_{s+1}) + \ldots + c_nF(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$. Allora $F(c_{s+1}\mathbf{v}_{s+1} + \ldots + c_n\mathbf{v}_n) = c_{s+1}F(\mathbf{v}_{s+1}) + \ldots + c_nF(\mathbf{v}_n) = \mathbf{0}$. Pertanto $c_{s+1}\mathbf{v}_{s+1} + \ldots + c_n\mathbf{v}_n \in Ker(F)$. Poiche $\{\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_s\}$ è una base di $Ker(F)$, esistono $b_1, \ldots, b_s \in \mathbb{K}$ tali che $c_{s+1}\mathbf{v}_{s+1} + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = b_1\mathbf{n}_1 + \cdots + b_s\mathbf{n}_s$ e quindi $b_1\mathbf{n}_1 + \ldots + b_s\mathbf{n}_s - c_{s+1}\mathbf{v}_{s+1} - \ldots - c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$. Ma $\mathbf{n}_1, \ldots, \mathbf{n}_s, \mathbf{v}_{s+1}, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, allora $b_1 = \ldots = b_s = c_{s+1} = \ldots = c_n = 0$. Ne segue che $F(\mathbf{v}_{s+1}), \ldots, F(\mathbf{v}_n)$ sono linearmente indipendenti. □

Esempi 8.12.

1. Si consideri l'applicazione lineare

$$F : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto A + A^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

   Allora $Im(F) = Sym_n(\mathbb{K})$ e $Ker(F) = ASym_n(\mathbb{K})$.

2. Si consideri l'applicazione lineare

$$F : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \longmapsto A - A^t \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}).$$

   Allora $Im(F) = ASym_n(\mathbb{K})$ e $Ker(F) = Sym_n(\mathbb{K})$.

Corollario 8.13. *Sia $F : V \longrightarrow V'$ un omomorfismo, con $\dim(V) = \dim(V') = n$. Allora F è iniettiva se e solo se F è suriettiva.*

Dimostrazione. F è iniettiva se e solo se $Ker(F) = \{\mathbf{0}\}$ se e solo se $dim(Ker(F)) = 0$ se e solo se $\dim(Im(F)) = \dim(V) = n$ se e solo se F è suriettiva. $\square$

Il prossimo risultato esprime il fatto che un'applicazione lineare è determinata dalle immagini dei vettori di una base del dominio.

Proposizione 8.14. *Siano V, W due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali, sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ una base di V e siano $\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n$ vettori di W. Allora esiste un' unica appliczione lineare $F : V \longrightarrow W$, tale che $F(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i$, $1 \leq i \leq n$.*

Dimostrazione. Se F esiste, allora essa è unica. Infatti $\forall\, \mathbf{v} \in V$, siano $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$ tali che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, allora poichè F è lineare si ha che $F(\mathbf{v}) = x_1F(\mathbf{e}_1) + \ldots + x_nF(\mathbf{e}_n) = x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_n\mathbf{w}_n$.

Basta, quindi mostrare che l'applicazione $F : \mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n \in V \longmapsto x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_n\mathbf{w}_n \in W$ è lineare. Siano $c, c' \in \mathbb{K}$, $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$, $\mathbf{v}' = y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n \in V$, allora $c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}' = c(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) + c'(y_1\mathbf{e}_1 + \ldots + y_n\mathbf{e}_n) = (cx_1 + c'y_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + (cx_n + c'y_n)\mathbf{e}_n$ e quindi $F(c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}') = (cx_1 + c'y_1)\mathbf{w}_1 + \ldots + (cx_n + c'y_n)\mathbf{w}_n = c(x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_n\mathbf{w}_n) + c'(y_1\mathbf{w}_1 + \ldots + y_n\mathbf{w}_n) = cF(\mathbf{v}) + c'F(\mathbf{v}')$. $\square$

Due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali V, W si dicono *isomorfi* se esiste un isomorfismo $F : V \longrightarrow W$.

Teorema 8.15. *Due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali V, W (di dimensione finita) sono isomorfi se e solo se $\dim(V) = \dim(W)$.*

Dimostrazione. Se esiste un isomorfismo $F : V \longrightarrow W$, allora dalla Formula dimensionale per le applicazioni lineari, si ha che $\dim(V) = \dim(W)$, in quanto $\dim(Ker(F)) = 0$ e $\dim(Im(F)) = \dim(W)$.

Viceversa, se $\dim(V) = \dim(W)$, siano $\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V e $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ una base di W. Dalla Proposizione 8.14 esiste un'unica applicazione lineare $F : V \longrightarrow W$, tale che $F(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$, $1 \leq i \leq n$. Allora $\{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_n\}$ è una base di $Im(F)$ e quindi $\dim(Im(F)) = \dim(W) = n$ ed F è suriettiva. Inoltre, dal Corollario 8.13, si ha che F è iniettiva. Allora F è un isomorfismo. $\square$

8.2 Matrice associata ad un'applicazione lineare rispetto ad una coppia di basi

Siano V, W due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali tali che $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ e siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ basi di V e W, rispettivamente. Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare. La matrice $m \times n$ la cui j–esima colonna, $1 \leq j \leq n$, è costituita dalle coordinate del vettore $F(\mathbf{v}_j) \in W$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ si dice *matrice associata ad F rispetto alle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$.*

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1) &= a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \ldots + a_{m1}\mathbf{w}_m \\ F(\mathbf{v}_2) &= a_{12}\mathbf{w}_1 + a_{22}\mathbf{w}_2 + \ldots + a_{m2}\mathbf{w}_m \\ &\vdots \\ F(\mathbf{v}_n) &= a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \ldots + a_{mn}\mathbf{w}_m \end{aligned}$$

La matrice associata ad F rispetto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ è:

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Si noti che $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ dipende, oltre che da F, anche dalle basi di V e W. Inoltre, fissate una base di V e W, dalla matrice è possibile risalire all'applicazione lineare.

Proposizione 8.16. *Siano V, W $\mathbb{K}$–spazi vettoriali tali che $\dim(V) = n$, $\dim(W) = m$ e siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_m\}$ basi di V e W, rispettivamente. Sia $F : V \longrightarrow W$ un'applicazione lineare, allora $\forall \mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n \in V$, si ha $F(\mathbf{v}) = y_1\mathbf{w}_1 + \dots + y_m\mathbf{w}_m$, dove*

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Dimostrazione. $F(\mathbf{v}) = F(x_1\mathbf{v}_1 + \dots + x_n\mathbf{v}_n) = x_1F(\mathbf{v}_1) + \dots + x_nF(\mathbf{v}_n) = x_1(a_{11}\mathbf{w}_1 + a_{21}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{m1}\mathbf{w}_m) + \dots + x_n(a_{1n}\mathbf{w}_1 + a_{2n}\mathbf{w}_2 + \dots + a_{mn}\mathbf{w}_m) = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j\right)\mathbf{w}_1 + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j\right)\mathbf{w}_m = y_1\mathbf{w}_1 + \dots + y_m\mathbf{w}_m$. Poichè un vettore si esprime in maniera unica come combinazione lineare di una base si ha che $y_i = \left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j\right)$, $1 \leq i \leq m$, come volevasi. □

Osservazione 8.17. Tenendo conto dell'Osservazione 8.6 e dell'Esempio 8.2, 3., le colonne della matrice $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ formano un insieme di generatori di un sottospazio isomorfo a $Im(F)$. Inoltre, si noti che $\dim(Im(F)) = rg(A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})$.

Esempi 8.18.

1. Siano V, W due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali tali che $\dim(V) = 2$ e $\dim(W) = 3$. Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ basi di V e W. Si consideri l'applicazione lineare F, dove

$$F(\mathbf{v}_1) = 3\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_2 + 17\mathbf{w}_2$$
$$F(\mathbf{v}_2) = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 - 1\mathbf{w}_3.$$

   Allora la matrice associata ad F rispetto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ è:

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ 17 & -1 \end{pmatrix}$$

2. Si consideri l'applicazione lineare

$$F : (x, y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (x + y, 2x, x - y) \in \mathbb{R}^3.$$

Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1 = (1,0), \mathbf{v}_2 = (1,1)\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1 = (1,0,0), \mathbf{w}_2 = (1,1,0), \mathbf{w}_3 = (1,1,1)\}$ basi di $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$. Allora

$$F(\mathbf{v}_1) = (1,2,1) = -\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_2$$
$$F(\mathbf{v}_2) = (2,2,0) = 0\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_2 + 0\mathbf{w}_3$$

e la matrice associata ad F rispetto a $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ è:

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ e sia $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2 = (\lambda+\mu, \mu)$. Allora $F(\mathbf{v}) = F(\lambda+\mu,\mu) = (\lambda+2\mu, 2\lambda+2\mu, \lambda)$. Lo stesso risultato si può ottenere come segue:

$$A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda \\ \lambda+2\mu \\ \lambda \end{pmatrix}$$

$$F(\mathbf{v}) = -\lambda\mathbf{w}_1 + (\lambda+2\mu)\mathbf{w}_2 + \lambda\mathbf{w}_3 = (\lambda+2\mu, 2\lambda+2\mu, \lambda).$$

8.3 Applicazioni lineari e matrici

Denotiamo con $Hom(V,W)$ l'insieme di tutte le applicazioni lineari da V in W.

$$Hom(V,W) = \{F : V \longrightarrow W \mid F \text{ omomorfismo}\}.$$

Siano $F_1, F_2 \in Hom(V,W)$ e $\lambda \in \mathbb{K}$. Definiamo

$$F_1 + F_2 : \mathbf{v} \in V \longmapsto (F_1+F_2)(\mathbf{v}) = F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{v}) \in W,$$

$$\lambda F_1 : \mathbf{v} \in V \longmapsto \lambda F_1(\mathbf{v}) \in W.$$

Proposizione 8.19. *$F_1 + F_2$ e λF_1 sono applicazioni lineari da V in W.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, allora $(F_1+F_2)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = F_1(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) + F_2(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = F_1(\mathbf{v}_1)+F_1(\mathbf{v}_2)+F_2(\mathbf{v}_1)+F_2(\mathbf{v}_2) = (F_1(\mathbf{v}_1)+F_2(\mathbf{v}_1))+(F_1(\mathbf{v}_2)+F_2(\mathbf{v}_2)) = (F_1+F_2)(\mathbf{v}_1)+(F_1+F_2)(\mathbf{v}_2)$.

Sia $c \in \mathbb{K}$ e sia $\mathbf{v} \in V$, allora $(F_1+F_2)(c\mathbf{v}) = F_1(c\mathbf{v}) + F_2(c\mathbf{v}) = cF_1(\mathbf{v}) + cF_2(\mathbf{v}) = c(F_1(\mathbf{v}) + F_2(\mathbf{v})) = c(F_1+F_2)(\mathbf{v})$.

Analogamente siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$, allora $(\lambda F)(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \lambda F(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2) = \lambda(F(\mathbf{v}_1) + F(\mathbf{v}_2)) = \lambda F(\mathbf{v}_1) + \lambda F(\mathbf{v}_2) = (\lambda F)(\mathbf{v}_1) + (\lambda F)(\mathbf{v}_2)$.

Sia $c \in \mathbb{K}$ e sia $\mathbf{v} \in V$, allora $(\lambda F)(c\mathbf{v}) = \lambda F(c\mathbf{v}) = \lambda c F(\mathbf{v}) = c(\lambda F(\mathbf{v})) = c(\lambda F)(\mathbf{v})$. □

Pertanto $F_1 + F_2, \lambda F_1 \in Hom(V,W)$ e vale quanto segue.

Corollario 8.20. *$Hom(V, W)$ è un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale.*

Teorema 8.21. *Siano V, W due $\mathbb{K}$–spazi vettoriali e siano $\mathcal{B} = \{v_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ e $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ basi di V e W, rispettivamente. L'applicazione:*

$$\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} : F \in Hom(V, W) \longmapsto A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$$

è lineare. In particolare $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ è un isomorfismo di spazi vettoriali e $\dim(Hom(V, W)) = \dim(\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})) = mn$.

Dimostrazione. Siano $F, G \in Hom(V, W)$ e siano $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$, $B_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ le matrici associate ad F e G, rispettivamente, rispetto alle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$. Dalla Proposizione 8.16, se x è il vettore colonna delle coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base $\mathcal{B}$, allora il vettore colonna delle coordinate di $F(\mathbf{v})$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ risulta $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, x$, mentre il vettore colonna delle coordinate di $G(\mathbf{v})$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è $B_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, x$. Poichè $\forall\ \mathbf{v} \in V$, $(F + G)(\mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) + G(\mathbf{v})$, il vettore colonna delle coordinate di $(F + G)(\mathbf{v})$ rispetto a $\mathcal{B}'$ è $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, x + B_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}\, x = (A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} + B_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})\, x$. Pertanto la matrice associata ad $F + G$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ è $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} + B_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$. Analogamente si può mostrare che $\lambda A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ è la matrice associata a λF rispetto alle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$. Abbiamo allora mostrato che $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ è un'applicazione lineare.

Mostriamo ora che $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ è suriettiva. Infatti, se $M \in \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$, sia $F_M : V \longrightarrow W$ l'applicazione definita come segue. Se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n \in V$, allora

$$F_M(\mathbf{v}) = (M^{(1)}\mathbf{x})\mathbf{w}_1 + \ldots + (M^{(m)}\mathbf{x})\mathbf{w}_m,$$

dove $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$. Si noti che il vettore colonna delle coordinate di $F_M(\mathbf{v})$ è $M\mathbf{x}$. Inoltre F_M è lineare. Infatti se $c, c' \in \mathbb{K}$ e $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, $\mathbf{v}' = y_1\mathbf{v}_1 + \ldots + y_n\mathbf{v}_n \in V$, posto $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^t$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)^t$, si ha che

$$F_M(c\mathbf{v} + c'\mathbf{v}') = (M^{(1)}(c\mathbf{x} + c'\mathbf{y}))\mathbf{w}_1 + \ldots + (M^{(m)}(c\mathbf{x} + c'\mathbf{y}))\mathbf{w}_m =$$

$$= (cM^{(1)}\mathbf{x} + c'M^{(1)}\mathbf{y})\mathbf{w}_1 + \ldots + (cM^{(m)}\mathbf{x} + c'M^{(m)}\mathbf{y})\mathbf{w}_m =$$

$$= c\left((M^{(1)}\mathbf{x})\mathbf{w}_1 + \ldots + (M^{(m)}\mathbf{x})\mathbf{w}_m\right) + c'\left((M^{(1)}\mathbf{y})\mathbf{w}_1 + \ldots + (M^{(m)}\mathbf{y})\mathbf{w}_m\right) =$$

$$= cF_M(\mathbf{v}) + c'F_M(\mathbf{v}').$$

Poichè la matrice associata ad F_M rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ è la matrice M, si ha che $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(F_M) = M$.

Mostriamo, infine, che $\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ è iniettiva. Se $F : V \longrightarrow W$ è un'applicazione lineare la cui matrice associata rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ è la matrice nulla, allora $F(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, $\forall\, \mathbf{v} \in V$. Pertanto F è l'applicazione lineare nulla e $Ker(\Phi_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}) = \{\mathbf{0}\}$. □

Proposizione 8.22. *Siano V, W, U $\mathbb{K}$–spazi vettoriali, $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}''$ basi di V, W ed U, rispettivamente. Siano $F : V \longrightarrow W$, $G : W \longrightarrow U$ applicazioni lineari. Se A è la matrice associata ad F rispetto a $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}'$ e B è la matrice associata a G rispetto a $\mathcal{B}'$ e $\mathcal{B}''$, allora BA è la matrice associata a $G \circ F$ rispetto alle basi $\mathcal{B}$ e $\mathcal{B}''$.*

Dimostrazione. Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_m\}$ e $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s\}$. Se

$$\mathbf{v} = z_1\mathbf{v}_1 + \ldots + z_n\mathbf{v}_n \in V,$$

siano

$$F(\mathbf{v}) = x_1\mathbf{w}_1 + \ldots + x_m\mathbf{w}_m \text{ e } (G \circ F)(\mathbf{v}) = G(F(\mathbf{v})) = y_1\mathbf{u}_1 + \ldots + y_s\mathbf{u}_s.$$

Posto $\mathbf{z} = (z_1, \ldots, z_n)^t$, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^t$ e $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_s)^t$, dalla Proposizione 8.16, si ha che

$$\mathbf{x} = A\mathbf{z}$$

e

$$\mathbf{y} = B\mathbf{x} = B(A\mathbf{z}) = (BA)\mathbf{z},$$

come volevasi. □

Corollario 8.23. *Se $F \in Hom(V, W)$ è un isomorfismo e $A_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ è la matrice associata ad F rispetto alle basi $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$, allora $A^{-1}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ è la matrice associata ad F^{-1} rispetto alle basi $\mathcal{B}'$, $\mathcal{B}$.*

8.4 Cambiamento di base

Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale tale che $\dim(V) = n$ e siano $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ due basi di V. Allora esistono degli scalari $a_{ij} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\begin{array}{c} \mathbf{f}_1 = a_{11}\mathbf{e}_1 + a_{21}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n1}\mathbf{e}_n = (\sum_{i=1}^n a_{i1}\mathbf{e}_i) \\ \mathbf{f}_2 = a_{12}\mathbf{e}_1 + a_{22}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{n2}\mathbf{e}_n = (\sum_{i=1}^n a_{i2}\mathbf{e}_i) \\ \vdots \\ \mathbf{f}_n = a_{1n}\mathbf{e}_1 + a_{2n}\mathbf{e}_2 + \ldots + a_{nn}\mathbf{e}_n = (\sum_{i=1}^n a_{in}\mathbf{e}_i) \end{array}$$

Si consideri la matrice quadrata di ordine n

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

La matrice M si chiama *matrice del cambiamento di base da $\mathcal{E}$ ad $\mathcal{F}$* o anche *matrice di passaggio da $\mathcal{E}$ ad $\mathcal{F}$*.

Osservazione 8.24. Si noti che $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Questo fatto si può vedere in due modi.

Infatti da una parte M è la matrice associata all'applicazione lineare identica id_V rispetto alle basi $\mathcal{F}$ ed $\mathcal{E}$ e id_V è un isomorfismo.

Inoltre, tenendo conto dell'Esempio 8.2, 3., le colonne della matrice M formano un insieme di vettori linearmente indipendenti di $\mathbb{K}^n$.

Sia $\mathbf{v} \in V$, allora $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n$ e $\mathbf{v} = y_1\mathbf{f}_1 + \ldots + y_n\mathbf{f}_n$. Si noti che la matrice M può essere considerata come matrice associata all'applicazione identica (Esempio 8.2, 2.) $id_V : \mathbf{v} \in V \longmapsto \mathbf{v} \in V$ rispetto alle basi $\mathcal{F}$ e $\mathcal{E}$. Allora, dalla Proposizione 8.16 e dal Corollario 8.23, si ha che

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

da cui si ricava

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Vale, pertanto, il seguente risultato.

Corollario 8.25. *Siano $\mathcal{E}$ ed $\mathcal{F}$ due basi dello spazio vettoriale V. Se M è la matrice di passaggio da $\mathcal{E}$ ad $\mathcal{F}$, allora M^{-1} è la matrice di passaggio da $\mathcal{F}$ ad $\mathcal{E}$.*

8.5 Matrici associate ad un endomorfismo

Due matrici $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dicono *simili*, se esiste $C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $B = C^{-1}AC$.

Lemma 8.26. *Matrici simili hanno lo stesso determinante.*

Dimostrazione. Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ simili. Allora $\exists\, C \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $B = C^{-1}AC$ e $\det(B) = \det(C^{-1}AC) = \det(C^{-1})\det(A)\det(C) = \det(C)^{-1}\det(A)\det(C) = \det(A)$. $\square$

Il prossimo risultato mostra che matrici associate ad un endomorfismo sono simili.

Proposizione 8.27. *Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale tale che $\dim(V) = n$, siano $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathcal{F} = \{\mathbf{f}_1, \ldots, \mathbf{f}_n\}$ due basi di V e sia $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Se M è la matrice di passaggio da $\mathcal{E}$ ad $\mathcal{F}$, $A_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ è la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{E}$ e $A_{\mathcal{F},\mathcal{F}}$ è la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{F}$, allora $A_{\mathcal{F},\mathcal{F}} = M^{-1}A_{\mathcal{E},\mathcal{E}}M$*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v} \in V$. Allora esistono (e sono uniche) le n–uple $(x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{K}^n$ tali che $\mathbf{v} = x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n = y_1\mathbf{f}_1 + \ldots + y_n\mathbf{f}_n$. Inoltre

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Poichè $F(\mathbf{v}) \in V$, allora esistono (e sono uniche) le n–uple $(x'_1, \ldots, x'_n), (y'_1, \ldots, y'_n) \in \mathbb{K}^n$ tali che $F(\mathbf{v}) = x'_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x'_n\mathbf{e}_n = y'_1\mathbf{f}_1 + \ldots + y'_n\mathbf{f}_n$. Inoltre

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}.$$

Dalla Proposizione 8.16 si ha che

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = M^{-1} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix} = M^{-1}A_{\mathcal{E},\mathcal{E}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = M^{-1}A_{\mathcal{E},\mathcal{E}}M \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

□

La matrice $A_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ associata all'endomorfismo F rispetto alla base $\mathcal{E}$ sarà anche denotata con $A_{\mathcal{E}}$.

Esempi 8.28. 1. Sia $F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x + y, y - z, 2y + 4z) \in \mathbb{R}^3$. La matrice associata ad F rispetto alla base canonica $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ di $\mathbb{R}^3$ è

$$A_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Si consideri la seguente base di $\mathbb{R}^3$: $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1 = (0, 0, 1), \mathbf{v}_2 = (0, 1, 1), \mathbf{v}_3 = (1, 1, 1)\}$. Sia $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$, allora

$$(0, 0, 1) = 0\mathbf{e}_1 + 0\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3,\ (0, 1, 1) = 0\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3,\ (1, 1, 1) = 1\mathbf{e}_1 + 1\mathbf{e}_2 + 1\mathbf{e}_3,$$

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mentre la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ risulta

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Allora la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}'$ è

$$A_{\mathcal{B}'} = M^{-1}A_{\mathcal{B}}M = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Infatti

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1) &= 5\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 + 0\mathbf{v}_3 = (0,-1,4), \\ F(\mathbf{v}_2) &= 6\mathbf{v}_1 - 1\mathbf{v}_2 + 1\mathbf{v}_3 = (1,0,6), \\ F(\mathbf{v}_3) &= 6\mathbf{v}_1 - 3\mathbf{v}_2 + 3\mathbf{v}_3 = (3,0,6). \end{aligned}$$

2. Sia F l'endomorfismo su $\mathbb{R}^2$ tale che $F(1,1) = (1,2)$ e $F(0,2) = (4,4)$. Allora è possibile determinare F. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ la base canonica di $\mathbb{R}^2$ e sia $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_1 = (1,1), (0,2)\}$. Si noti che $\mathcal{B}'$ è una base di $\mathbb{R}^2$. Inoltre

$$\begin{aligned} F(\mathbf{v}_1) &= (1,2) = \mathbf{v}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 \\ F(\mathbf{v}_2) &= (4,4) = 4\mathbf{v}_1 + 0\mathbf{v}_2, \end{aligned}$$

quindi

$$A_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pertanto la matrice di passaggio da $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$ risulta

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Allora

$$A_{\mathcal{B}} = M A_{\mathcal{B}'} M^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e quindi

$$F : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \longmapsto (-x + 2y, 2y) \in \mathbb{R}^2.$$

9 Diagonalizzabilità di un endomorfismo e di una matrice quadrata

Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale tale che $\dim(V) = n$ e sia $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo.

F si definisce *diagonalizzabile* se esiste una base $\mathcal{E}$ di V tale che $A_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$, la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{E}$, risulti diagonale.

$$A_{\mathcal{E},\mathcal{E}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Se questo accade, allora $\mathcal{E}$ è detta *base diagonalizzante* per F.

Una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice *diagonalizzabile* se è simile ad una matrice diagonale. In altri termini una matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si dice diagonalizzabile se esiste una matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $P^{-1}AP = D$, dove $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ è una matrice diagonale.

Osservazione 9.1. Sia $\mathcal{B}$ una base di V e sia $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. F è diagonalizzabile se e solo se la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$ è diagonalizzabile.

Osservazione 9.2. Si noti che $F : V \longrightarrow V$ è un endomorfismo diagonalizzabile ed $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ è una base diagonalizzante per F se e solo se esistono $\lambda_i \in \mathbb{K}$ tali che $F(\mathbf{e}_i) = \lambda_i \mathbf{e}_i$, $1 \leq i \leq n$.

Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale e sia $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Un vettore $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ si dice *autovettore di F* se esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$. Lo scalare λ si dice *autovalore di F (relativo all'autovettore* $\mathbf{v}$).

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e sia $F : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$ l'endomorfismo la cui matrice associata rispetto alla base canonica è A. Un *autovettore di A* è un autovettore di F, mentre un *autovalore di A* è un autovalore di F. Equivalentemente un vettore $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ si dice *autovettore di A* se esiste uno scalare $\lambda \in \mathbb{K}$ tale che

$$A\mathbf{v}^t = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \lambda\mathbf{v}^t.$$

Lo scalare λ si dice *autovalore di A (relativo all'autovettore* $\mathbf{v}$).

Lemma 9.3. *L'autovalore relativo ad un autovettore è univocamente determinato.*

Dimostrazione. Siano $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$ autovalori relativi all'autovettore v. Allora $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v} = \mu\mathbf{v}$ e quindi $(\lambda - \mu)\mathbf{v} = \mathbf{0}$. Poichè $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, si ha che $\lambda - \mu = 0$ e pertanto $\lambda = \mu$. □

Sia $V_\lambda(F) = \{\mathbf{v} \in V \mid F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}\}$ l'insieme degli autovettori di F relativi ad un fissato autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$ munito del vettore nullo. Il prossimo risultato mostra che $V_\lambda(F)$ è un sottospazio vettoriale di V.

Proposizione 9.4. *$V_\lambda(F)$ è un sottospazio vettoriale di V.*

Dimostrazione. Siano $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V$ autovettori dell'endomorfismo $F : V \longrightarrow V$ relativi allo stesso autovalore λ e siano $c_1, c_2 \in \mathbb{K}$. Se $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 \neq \mathbf{0}$, allora il vettore $c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ è ancora un autovettore di F relativo all'autovalore λ. Infatti $F(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2) = c_1F(\mathbf{v}_1) + c_2F(\mathbf{v}_2) = c_1\lambda\mathbf{v}_1 + c_2\lambda\mathbf{v}_2 = \lambda(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2)$. □

$V_\lambda(F)$ è detto *autospazio relativo all'autovalore* λ. Inoltre autovettori relativi ad autovalori distinti risultano linearmente indipendenti, come mostrato dal prossimo risultato.

Proposizione 9.5. *Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sono a due a due distinti e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ sono autovettori di F relativi agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, rispettivamente, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti.*

Dimostrazione. Per induzione su n.

Base d'induzione. Per $n = 1$, $\mathbf{v}_1$ è linearmente indipendente, in quanto $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$.

Ipotesi d'induzione: la tesi è vera per $n - 1$.

Tesi d'induzione. Siano $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in V$ autovettori relativi agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, rispettivamente. Siano $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$ tali che $c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$, allora

$$\lambda_1 c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + \lambda_1 c_n\mathbf{v}_n = \lambda_1\mathbf{0} = \mathbf{0} \tag{9.1}$$

e

$$F(c_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\mathbf{v}_n) = c_1F(\mathbf{v}_1) + \ldots + c_nF(\mathbf{v}_n) = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \ldots + c_n\lambda_n\mathbf{v}_n = F(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{9.2}$$

Sottraendo la (9.1) dalla (9.2), si ha

$$c_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{v}_2 + \ldots + c_n(\lambda_n - \lambda_1)\mathbf{v}_n = \mathbf{0}.$$

Per ipotesi d'induzione $\mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti, quindi $c_2(\lambda_2 - \lambda_1) = \ldots = c_n(\lambda_n - \lambda_1) = 0$. Poichè $\lambda_i - \lambda_1 \neq 0$, per ogni $i = 2, \ldots, n$, si ha che $c_2 = \ldots = c_n = 0$. Quindi otteniamo che $c_1\mathbf{v}_1 = \mathbf{0}$ e pertanto anche $c_1 = 0$, essendo $\mathbf{v}_1 \neq \mathbf{0}$, come volevasi. □

Analogamente, se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, si definisce $V_\lambda(A) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{K}^n \mid A(\mathbf{v}^t) = \lambda\mathbf{v}^t\}$ l'insieme degli autovettori di A relativi ad un fissato autovalore $\lambda \in \mathbb{K}$ munito del vettore nullo. Similmente si dimostra quanto segue.

Proposizione 9.6. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

i) *$V_\lambda(A)$ è un sottospazio vettoriale di $\mathbb{K}^n$.*

ii) *Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sono a due a due distinti e $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{K}^n$ sono autovettori di A relativi agli autovalori $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, rispettivamente, allora $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ sono linearmente indipendenti.*

Proposizione 9.7. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ una matrice diagonalizzabile. Allora*

i) $A^k = PD^kP^{-1}$*, per ogni* $k \geq 1$*;*

ii) se $\lambda \in \mathbb{K}$ *è autovalore di* A *relativo all'autovettore* $\mathbf{v}$*, allora* λ^k *è autovalore di* A^k *relativo all'autovettore* $\mathbf{v}$*, per ogni* $k \geq 1$*.*

Dimostrazione. Per induzione su k.

i) Base d'induzione. Se $k = 1$, allora $A = PDP^{-1}$, poichè A è diagonalizzabile.

Ipotesi d'induzione: la tesi è vera per k. Quindi $A^k = PD^kP^{-1}$.

Tesi d'induzione. Mostriamo che $A^{k+1} = PD^{k+1}P^{-1}$. Infatti

$$\begin{aligned} A^{k+1} &= AA^k = A(PD^kP^{-1}) = (PDP^{-1})(PD^kP^{-1}) = \\ &= PD(PP^{-1})D^kP^{-1} = PDI_nD^kP = PD^{k+1}P^{-1}. \end{aligned}$$

ii) Base d'induzione. Se $k = 1$, allora $\exists\, \mathbf{v} \in \mathbb{K}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, tale che $A\mathbf{v}^t = \lambda\mathbf{v}^t$, poichè λ è autovalore di A.

Ipotesi d'induzione: la tesi è vera per k. Quindi $A^k\mathbf{v}^t = \lambda\mathbf{v}^t$.

Tesi d'induzione. Mostriamo che $A^{k+1}\mathbf{v}^t = \lambda^{k+1}\mathbf{v}^t$. Infatti

$$A^{k+1}\mathbf{v}^t = (AA^k)\mathbf{v}^t = A(A^k\mathbf{v}^t) = A(\lambda^k\mathbf{v}^t) = \lambda^k(A\mathbf{v}^t) = \lambda^k(\lambda\mathbf{v}^t) = \lambda^{k+1}\mathbf{v}^t.$$

□

9.1 Polinomio caratteristico

Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ e sia X un'indeterminata. Il determinante della matrice $A - XI_n$ è un polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{K}$ nell'indeterminata X, detto *polinomio caratteristico di A*. Il polinomio caratteristico di A si denota con $p_A(X)$:

$$p_A(X) = |A - XI_n|.$$

Sia $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo, sia $\mathcal{E}$ una base di V e sia $A_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ la matrice associata ad F rispetto ad $\mathcal{E}$. Allora $p_{A_{\mathcal{E},\mathcal{E}}}(X)$ è detto *polinomio caratteristico di F* e si denota con $p_F(X)$. Il prossimo risultato mostra che il polinomio caratteristico di F non dipende dalla base $\mathcal{E}$.

Lemma 9.8. *Matrici simili hanno lo stesso polinomio caratteristico.*

Dimostrazione. Siano $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ matrici simili. Esiste, pertanto, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tale che $B = M^{-1}AM$. Allora $B - XI_n = M^{-1}AM - XI_n = M^{-1}(A - XI_n)M$. Pertanto $|B - XI_n| = |M^{-1}(A - XI_n)M| = |M^{-1}||A - XI_n||M| = |A - XI_n|$. □

Il prossimo risultato fornisce un metodo pratico per calcolare autovalori ed autovettori di un endomorfismo F.

Teorema 9.9. *Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale tale che* $\dim(V) = n$ *e sia $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Allora $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di F se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico di F. In particolare F possiede al più n autovalori distinti.*

Dimostrazione. Lo scalare λ è un autovalore di F se e solo se esiste $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} \in V$ tale che $F(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ se e solo se $(F - \lambda id_V)(\mathbf{v}) = \mathbf{0}$, dove id_V è l'applicazione identica e $F - \lambda id_V : V \longrightarrow V$ è un endomorfismo. Inoltre se $\mathcal{E} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ è una base di V e $A_{\mathcal{E},\mathcal{E}}$ è la matrice associata ad F rispetto ad $\mathcal{E}$, allora $A_{\mathcal{E},\mathcal{E}} - \lambda I_n$ è la matrice associata ad $F - \lambda id_V$ rispetto ad $\mathcal{E}$. Pertanto se $\mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n$, allora $\mathbf{0} \neq (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ è soluzione non–banale del sistema omogeneo la cui matrice associata è $A - \lambda I_n$. Allora si ha che $\det(A - \lambda I_n) = 0$.

Infine F possiede al più n autovalori distinti poichè un polinomio di grado n a coefficienti in $\mathbb{K}$ possiede al più n radici in $\mathbb{K}$. $\square$

Analogamente si dimostra il seguente risultato.

Teorema 9.10. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Allora $\lambda \in \mathbb{K}$ è un autovalore di A se e solo se λ è radice del polinomio caratteristico di A. In particolare A possiede al più n autovalori distinti.*

9.2 Molteplicità algebrica e geometrica

Sia λ un autovalore dell'endomorfismo $F : V \longrightarrow V$ (o della matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$). Se λ è radice del polinomio caratteristico di F (o di A) con molteplicità uguale ad m, si dice che l'autovalore λ ha *molteplicità algebrica* pari ad m. La molteplicità algebrica di λ viene indicata con $m_a(\lambda)$.

Osservazione 9.11. Se λ è un autovalore dell'endomorfismo F (o della matrice A), dal Teorema 9.9 (o dal Teorema 9.10) si ha che $m_a(\lambda) \leq n$.

La dimensione dell'autospazio $V_\lambda(F)$ (o di $V_\lambda(A)$) relativo all'autovalore λ, viene detta *molteplicità geometrica di λ*. La molteplicità geometrica di λ viene indicata con $m_g(\lambda)$. Vale il seguente risultato.

Proposizione 9.12. *Se λ è un autovalore dell'endomorfismo $F : V \longrightarrow V$, allora $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ una base di V e sia A la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{B}$. Si noti che un vettore $\mathbf{0} \neq \mathbf{v} = x_1\mathbf{v}_1 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n \in V$ appartiene a V_λ se e solo se $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ è soluzione non–banale del sistema omogeneo di n equazioni nelle n incognite $X = (X_1, \ldots, X_n)^t$

$$(A - \lambda I_n)\, X = \mathbf{0}.$$

Poichè $\det(A - \lambda I_n) = 0$, si ha che $rg(A - \lambda I_n) = r < n$. Allora $m_g(\lambda) = \dim(V_\lambda) = n - r \geq 1$.

Sia $d = m_g(\lambda)$ e sia $\{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_d\}$ una base di V_λ. Dal Teorema del completamento ad una base esistono $n-d$ vettori di $V \setminus V_\lambda$, $\mathbf{e}_{d+1}, \ldots, \mathbf{e}_n$, tali che $\mathcal{E} = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ è una base di V. Se M è la matrice associata ad F rispetto alla base $\mathcal{E}$, allora

$$M = \begin{pmatrix} \lambda I_d & B \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix},$$

dove $\mathbf{0} \in \mathcal{M}_{n-d,d}(\mathbb{K})$ è la matrice nulla, $B \in \mathcal{M}_{d,n-d}(\mathbb{K})$ e $C \in \mathcal{M}_{n-d}(\mathbb{K})$. Allora il polinomio caratteristico di F risulta

$$p_F(X) = \det(M - XI_n) = (\lambda - X)^d \det(C - XI_{n-d}) = (\lambda - X)^d p_C(X),$$

dove $p_C(X)$ è il polinomio caratteristico di C che è quindi un polinomio di grado $n-d$ in X. Pertanto $m_a(\lambda) \geq d = m_g(\lambda)$. $\square$

Il prossimo teorema fornisce un criterio di diagonalizzabilità per un endomorfismo.

Teorema 9.13. *Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale tale che $\dim(V) = n$ e sia $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Allora F è diagonalizzabile se e solo se*

i) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di F è pari ad n,

ii) per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.

Dimostrazione. Siano $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, $r \leq n$, gli autovalori distinti di F, siano $m_1, \ldots, m_r$ le rispettive molteplicità algebriche e $V_{\lambda_1}, \ldots, V_{\lambda_r}$ i rispettivi autospazi. Si supponga che valgano le proprietà *i*) e *ii*), quindi $m_1 + \ldots + m_r = n$ e $\dim(V_{\lambda_j}) = m_j$, $1 \leq j \leq r$. Siano rispettivamente $\mathcal{B}_1 = \{\mathbf{v}_1, ..., \mathbf{v}_{m_1}\}$ una base di V_{λ_1}, $\mathcal{B}_2 = \{\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_{m_2}\}$ una base di V_{λ_2}, $\ldots$, $\mathcal{B}_r = \{\mathbf{w}_1, \ldots, \mathbf{w}_{m_r}\}$ una base di V_{λ_r}. Allora $\mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \ldots \cup \mathcal{B}_r$ è un insieme di n autovettori di F. Per concludere la dimostrazione, basta provare che $\mathcal{B}$ è una base di V, in tal caso, infatti $\mathcal{B}$ sarà una base diagonalizzante per F. A tal fine, mostriamo che i vettori di $\mathcal{B}$ sono linearmente indipendenti. Siano $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m_1}, \beta_1, \ldots, \beta_{m_2}, \ldots, \gamma_1, \ldots, \gamma_{m_r} \in \mathbb{K}$ tali che

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_{m_1} \mathbf{v}_{m_1} + \beta_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \beta_{m_2} \mathbf{u}_{m_2} + \ldots + \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \ldots + \gamma_{m_r} \mathbf{w}_{m_r} = \mathbf{0}.$$

Posto

$$\mathbf{e}_1 = \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \ldots + \alpha_{m_1} \mathbf{v}_{m_1},\ \mathbf{e}_2 = \beta_1 \mathbf{u}_1 + \ldots + \beta_{m_2} \mathbf{u}_{m_2}, \ldots, \mathbf{e}_r = \gamma_1 \mathbf{w}_1 + \ldots + \gamma_{m_r} \mathbf{w}_{m_r}, \quad (9.3)$$

si ha che

$$\mathbf{e}_1 + \ldots + \mathbf{e}_r = \mathbf{0}. \quad (9.4)$$

Inoltre dalla Proposizione 9.4, si ha che $\mathbf{e}_i \in V_{\lambda_i}$, mentre dalla Proposizione 9.5, i vettori $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r$ sono linearmente indipendenti. Allora, da (9.4), necessariamente $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_2 = \ldots = \mathbf{e}_r = \mathbf{0}$. Infine, tenendo conto delle (9.3) e del fatto che i vettori di $\mathcal{B}_i$, $1 \leq i \leq r$, sono linearmente indipendenti, si ha che $\alpha_1 = \ldots = \alpha_{m_1} = \beta_1 = \ldots = \beta_{m_2} = \gamma_1 = \ldots = \gamma_{m_r} = 0$, come volevasi.

Viceversa, se F è diagonalizzabile e $\mathcal{B}$ è una base diagonalizzante per F, allora gli n vettori di $\mathcal{B}$ sono autovettori di F. Inoltre, la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ associata ad F rispetto a $\mathcal{B}$ è una matrice diagonale e gli elementi della diagonale principale di M sono autovalori di F. Ne segue che la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di F è maggiore o uguale ad n. D'altro canto, dalla Proposizione 9.12 e dall'Osservazione 9.11, si ha che la somma delle molteplicità geometriche degli autovalori di F è esattamente n. Allora, necessariamente valgono le proprietà i) e ii). $\square$

Corollario 9.14. *Sia V un $\mathbb{K}$–spazio vettoriale tale che* $\dim(V) = n$ *e sia $F : V \longrightarrow V$ un endomorfismo. Se F possiede n autovalori distinti, allora F è diagonalizzabile.*

Analogamente valgono i seguenti risultati.

Teorema 9.15. *Sia $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.*

1) Se λ è un autovalore di A, allora $1 \leq m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda) \leq n$.

2) A è diagonalizzabile se e solo se

i) la somma delle molteplicità algebriche degli autovalori di A è pari ad n,

ii) per ogni autovalore la molteplicità geometrica coincide con la molteplicità algebrica.

3) Se A possiede n autovalori distinti, allora A è diagonalizzabile.

Osservazione 9.16. Una base diagonalizzante per un endomorfismo o per una matrice quadrata si ottiene scegliendo una base per ogni autospazio e prendendone l'unione.

Esempi 9.17. 1. Sia $F : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \longmapsto (2x + y, y - z, 2y + 4z) \in \mathbb{R}^3$. La matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathbb{R}^3$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di F è $p_A(X) = (2 - X)(X^2 - 5X + 6) = -(X - 3)(X - 2)^2$. Pertanto F possiede due autovalori distinti: 2, 3. In particolare $m_a(2) = 2$ e $m_a(3) = 1$. Per determinare l'autospazio relativo 3, consideriamo il sistema omogeneo associato a $A - 3I_3$:

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 = 0 \\ -2X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 + X_3 = 0 \end{cases}$$

Esso ammette le ∞ soluzioni $(t, t, -2t) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$. Pertanto $V_3(F) = \{(t, t, -2t) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, -2) \rangle$. Allora $m_g(3) = \dim(V_3(F)) = 1$.
Per determinare l'autospazio relativo 2, consideriamo il sistema omogeneo associato a $A - 2I_3$:

$$\begin{cases} X_2 = 0 \\ -X_2 - X_3 = 0 \\ 2X_2 + 2X_3 = 0 \end{cases}$$

Esso ammette le ∞ soluzioni $(t, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$, $t \in \mathbb{R}$. Pertanto $V_2(F) = \{(t, 0, 0) \in \mathbb{R}^3 \mid t \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$. Allora $m_g(2) = \dim(V_2(F)) = 1$. F non è diagonalizzabile in quanto $m_a(2) \neq m_g(2)$.

2. Se

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

si consideri l'endomorfismo $F : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ definito da $F(X) = XM - NX$. Mostreremo che F è diagonalizzabile e troveremo una base diagonalizzante per F. Se

$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix},$$

allora

$$F(X) = \begin{pmatrix} 2x_{11} + x_{12} & x_{11} + 2x_{12} \\ x_{21} + x_{22} & x_{21} + x_{22} \end{pmatrix}.$$

La matrice associata ad F rispetto alla base canonica di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Il polinomio caratteristico di F è $p_A(X) = \det(A - XI_4) = (X^2 - 4X + 3)(X^2 - 2X)$. Esso ha quattro radici distinte: $0, 1, 2, 3$, che sono gli autovalori di F (e di A). Pertanto $m_a(0) = m_a(1) = m_a(2) = m_a(3) = 1$. Cercare una base per gli autospazi corrispondenti a ciascun autovalore corrisponde a trovare delle basi rispettivamente per $V_0(F)$, $V_1(F)$, $V_2(F)$, $V_3(F)$. Per l'autovalore 0 il sistema

$$\begin{cases} 2X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + 2X_2 = 0 \\ X_3 + X_4 = 0 \\ X_3 + X_4 = 0 \end{cases}$$

ammette le ∞ soluzioni $(0, 0, t, -t) \in \mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$V_0(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & -t \end{pmatrix} \mid t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Allora $m_g(0) = \dim(V_0(F)) = 1$. Per l'autovalore 1 il sistema

$$\begin{cases} X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 + X_2 = 0 \\ X_4 = 0 \\ X_3 = 0 \end{cases}$$

ammette le ∞ soluzioni $(t, -t, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$V_1(F) = \left\{ \begin{pmatrix} t & -t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\mid\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Allora $m_g(1) = \dim(V_1(F)) = 1$. Per l'autovalore 2 il sistema

$$\begin{cases} X_2 = 0 \\ X_1 = 0 \\ -X_3 + X_4 = 0 \\ X_3 - X_4 = 0 \end{cases}$$

ammette le ∞ soluzioni $(0, 0, t, t) \in \mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$V_2(F) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ t & t \end{pmatrix} \;\mid\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Allora $m_g(2) = \dim(V_2(F)) = 1$. Per l'autovalore 3 il sistema

$$\begin{cases} -X_1 + X_2 = 0 \\ X_1 - X_2 = 0 \\ -2X_3 + X_4 = 0 \\ X_3 - 2X_4 = 0 \end{cases}$$

ammette le ∞ soluzioni $(t, t, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$, $t \in \mathbb{R}$. Pertanto

$$V_3(F) = \left\{ \begin{pmatrix} t & t \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \;\mid\; t \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

Allora $m_g(3) = \dim(V_3(F)) = 1$. Ne segue che una base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ rispetto alla quale F ha una matrice diagonale è data da

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

La matrice associata ad F rispetto a tale base di $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ è

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Si noti che la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è tale che $D = B^{-1}AB$.

Riferimenti bibliografici

[1] V. Abatangelo, B. Larato, A. Terrusi, *Complementi ed esercizi di algebra*, Laterza, Bari, 2009.

[2] A. Cavicchioli, F. Spaggiari, *Primo modulo di Geometria*, Pitagora Editrice, Bologna, 2002.

[3] E. Dedò, *Algebra lineare e geometria*, Pitagora Editrice, Bologna, 2004.

[4] V. Giordano, *Geometria e Algebra Lineare*, Mondadori, Milano, 2017.

[5] S. Lang, *Algebra Lineare*, Bollati Boringhieri, Torino, 1984.

[6] E. Sernesi, *Geometria 1*, Bollati Boringhieri, Torino, 1989.